

Χάος στην Κβαντομηχανική

Γ. Κοντόπουλος
Χ. Ευθυμιόπουλος
Α. Τζέμος

Κέντρο Ερευνών Αστρονομίας και Εφαρμοσμενων Μαθηματικών
της Ακαδημίας Αθηνών

Εξίσωση Schrödinger

$$\left(-\frac{1}{2}\nabla^2 + V(\vec{r}, t) \right) \Psi = i\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

$$(m = \hbar = 1)$$

Εξισώσεις Κινήσεως

$$\frac{dr}{dt} = \text{Im} \left(\frac{\nabla \Psi}{\Psi} \right)$$

(de Broglie 1926, Bohm 1952)

- Η ερμηνεία της Κοπεγχάγης (Bohr, Heisenberg, Born κλπ) της Κβαντομηχανικής δεν χρησιμοποιεί τροχιές.
- Το χάος σε αυτή την ερμηνεία είναι η κβαντική συμπεριφορά ενός συστήματος, το οποίο είναι κλασικά χαοτικό.

Εν τούτοις τα περισσότερα
ολοκληρώσιμα
συστήματα είναι χαοτικά στην
Κβαντομηχανική

π.χ.

$$V = \frac{1}{2} (x^2 + c^2 y^2)$$

$$H = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + x^2 + c^2 y^2)$$

Στην Κβαντομηχανική έχουμε:

$$\Psi = e^{-\frac{x^2+cy^2+i(1+c)t}{2}} (1 + axe^{-it} + bc^{\frac{1}{2}} xye^{-i(1+c)t})$$

Εξισώσεις Bohm:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a \sin t + bc^{1/2}y \sin(1+c)t}{G}$$

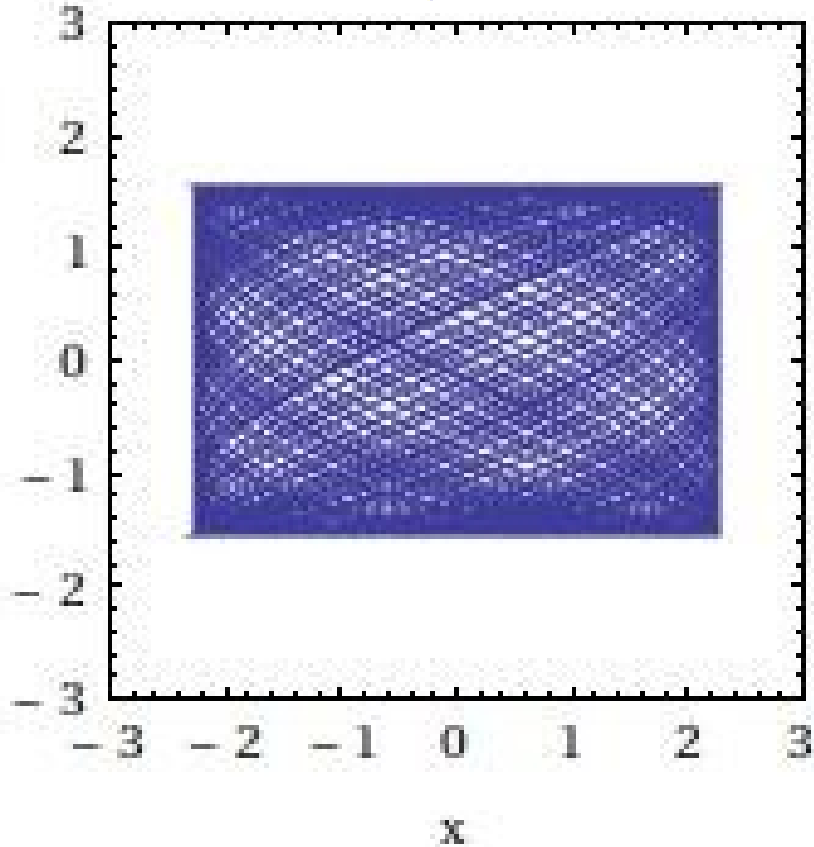
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{bc^{1/2}x(ax \sin ct + \sin(1+c)t)}{G}$$

$$G = 1 + 2ax \cos t + 2bc^{\frac{1}{2}}xy \cos(1+c)t + (ax)^2 + 2abc^{\frac{1}{2}}x^2y \cos ct + c(bxy)^2$$

Harmonic oscillator

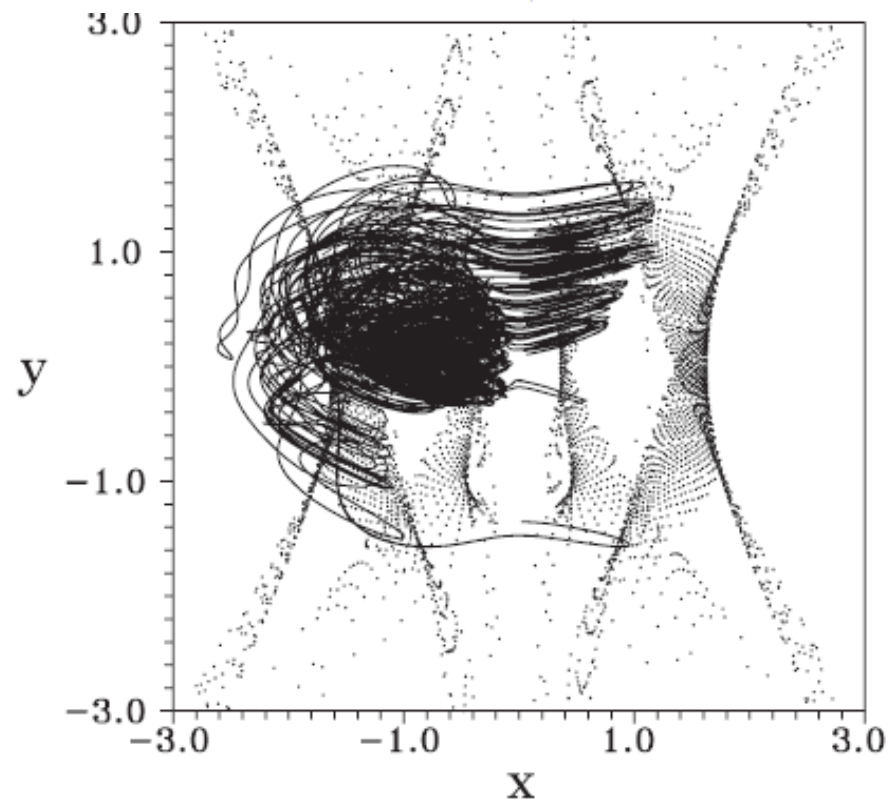
$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}[x^2 + (cy)^2]$$

$$c = \sqrt{2}/2$$



Classical

$$c = \sqrt{2}/2$$



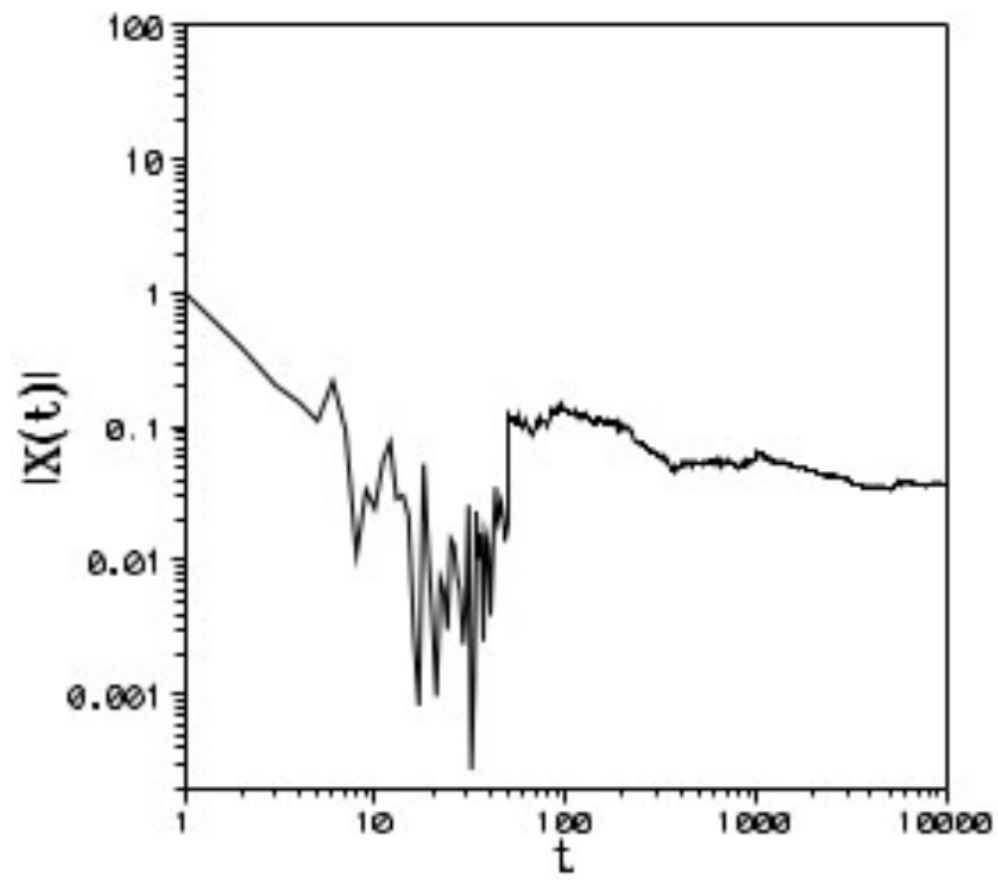
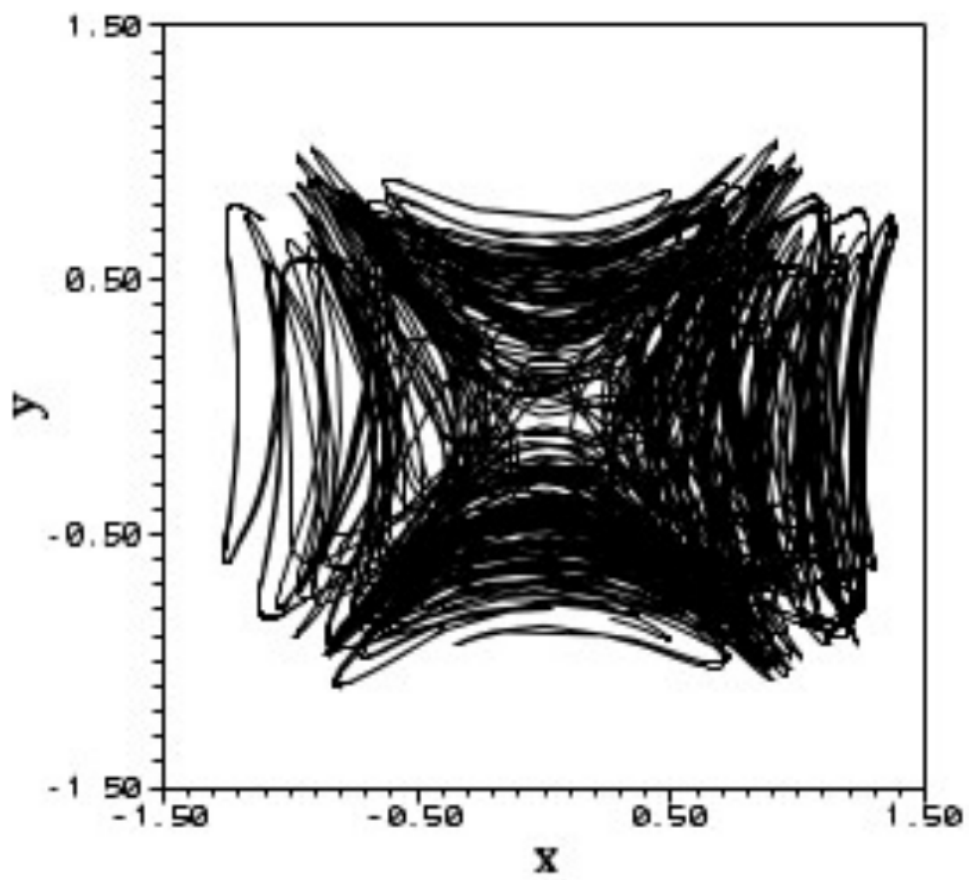
Quantum

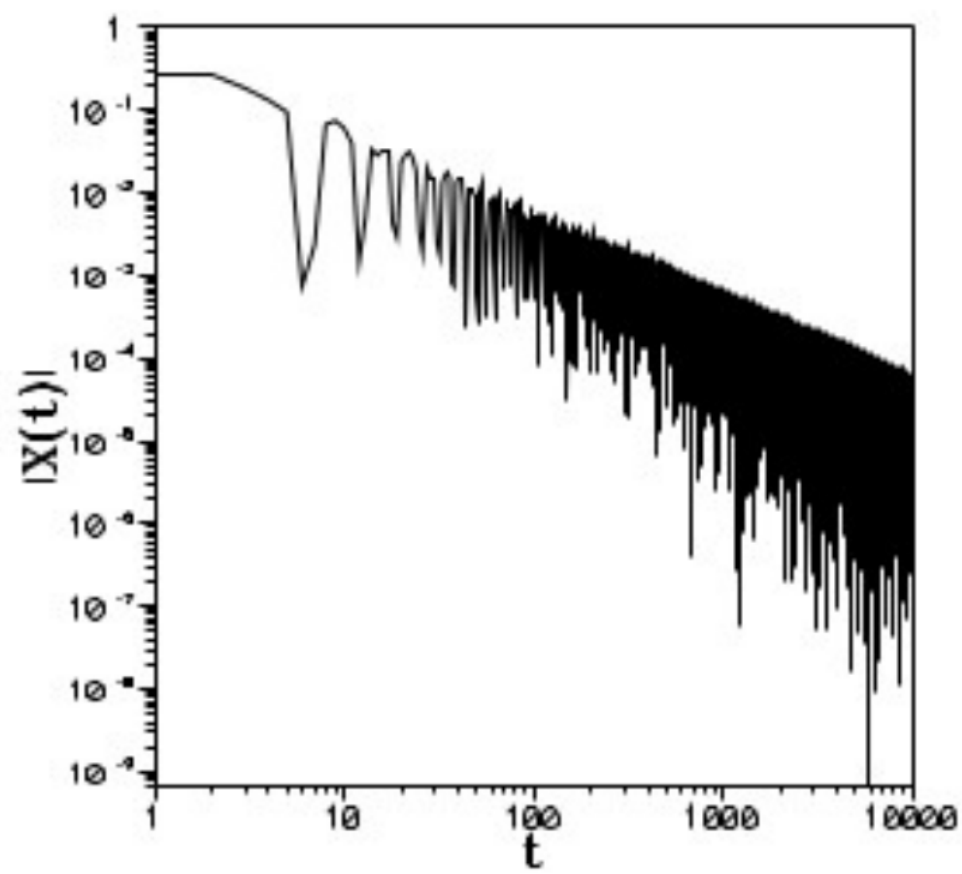
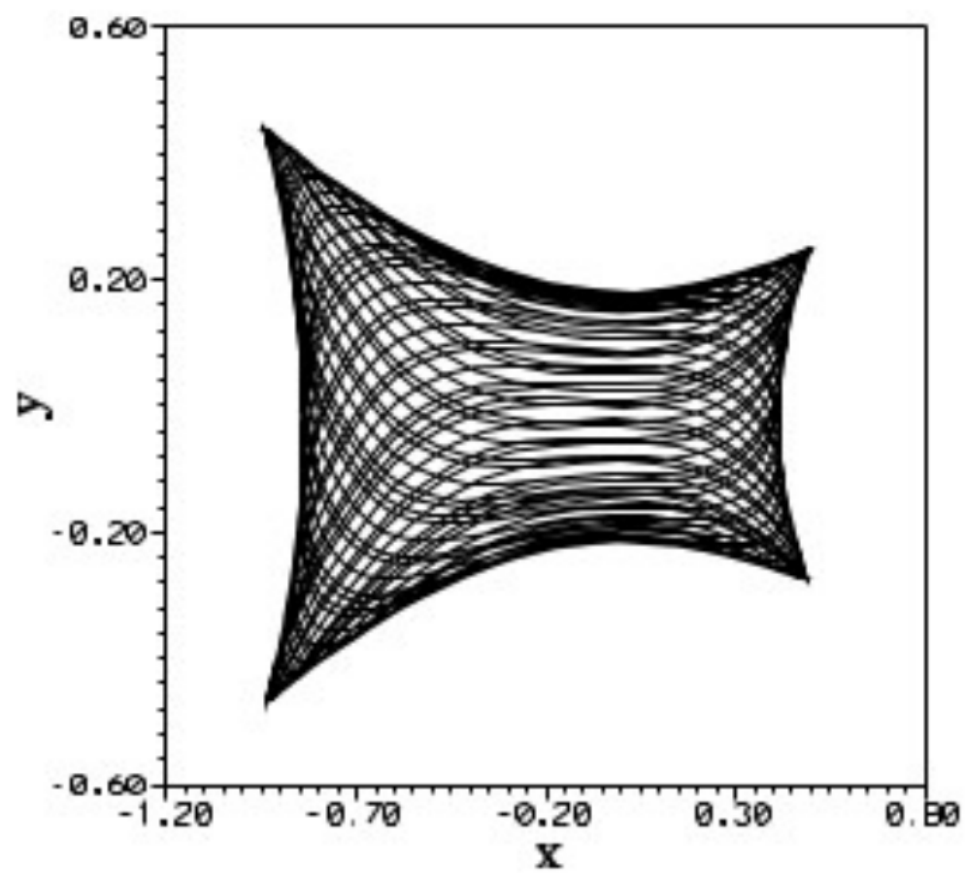
$x_0 = 0.85$
 $y_0 = 1.19$
 $p_{x0} = 2.13$
 $p_{y0} = 0.75$

Lyapunov Characteristic Number

$$LCN = \lim_{t \rightarrow \infty} X$$

$$X = \frac{\ln(\xi/\xi_0)}{t}$$



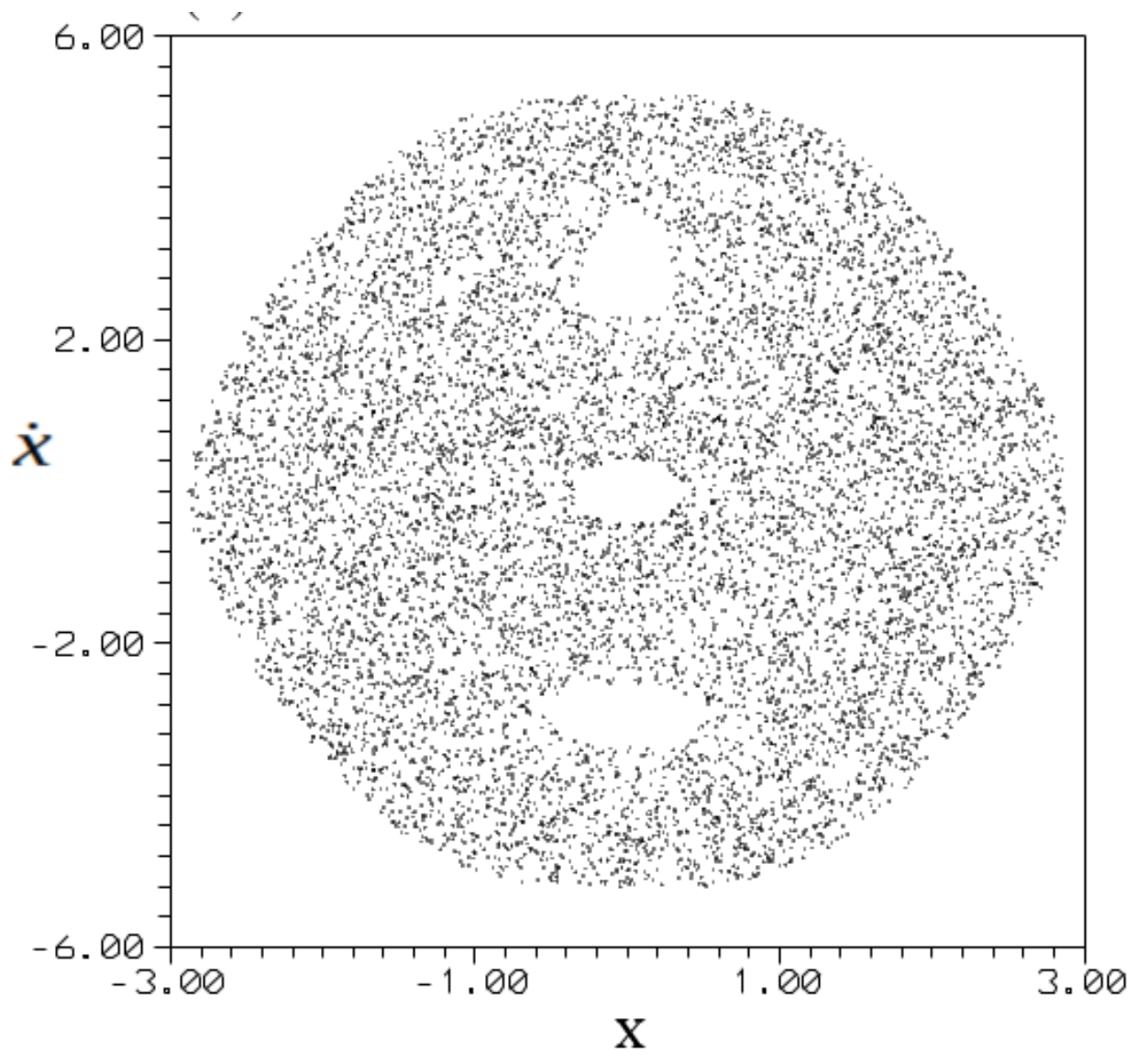


Εξάλλου υπάρχουν συστήματα που είναι χαοτικά κλασικά και οργανωμένα κβαντικά:

π.χ.

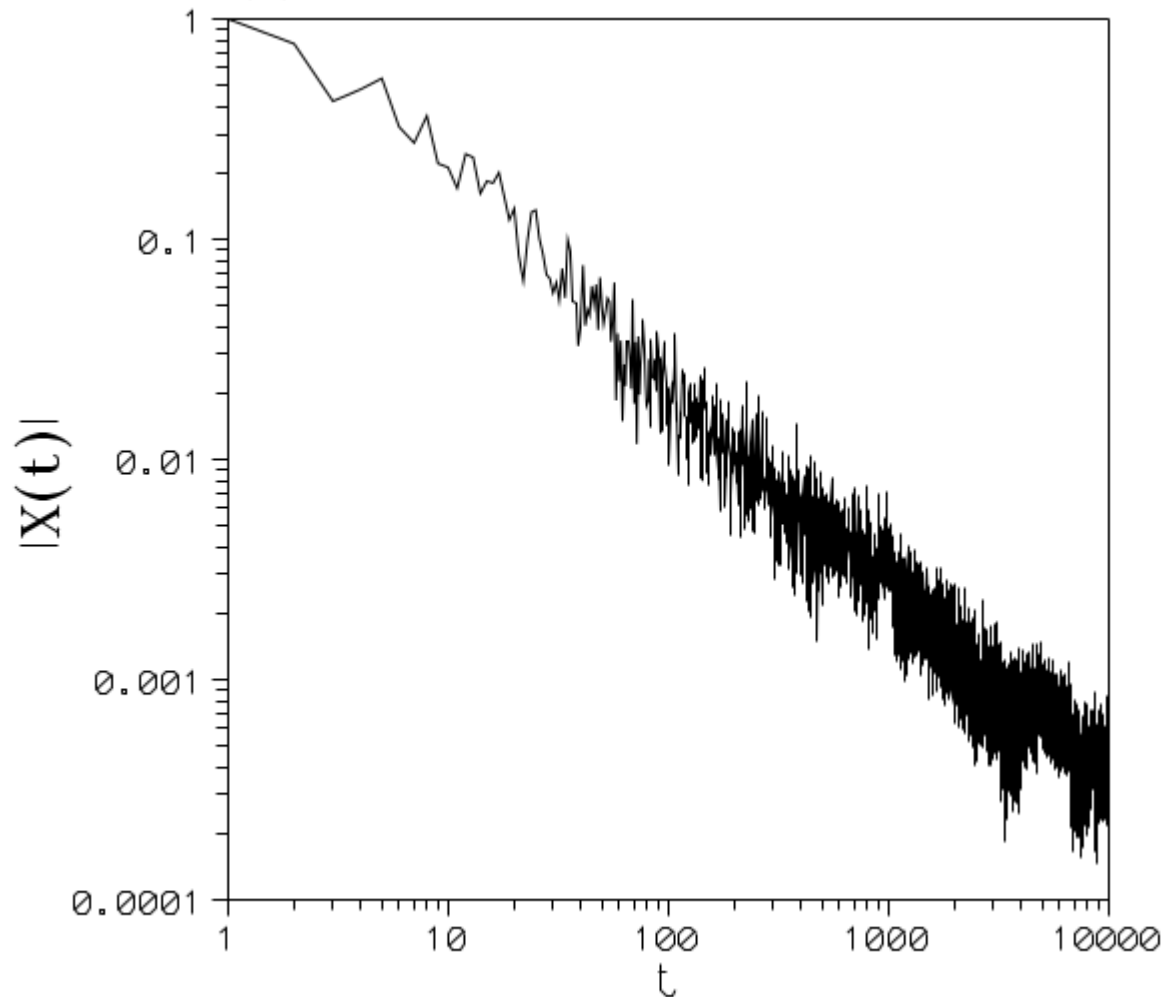
$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + x^2) + \frac{\varepsilon}{4} x^4 e^{-x^2/2\sigma^2} \cos(\omega t)$$

$1 \frac{1}{2}$ βαθμοί ελευθερίας

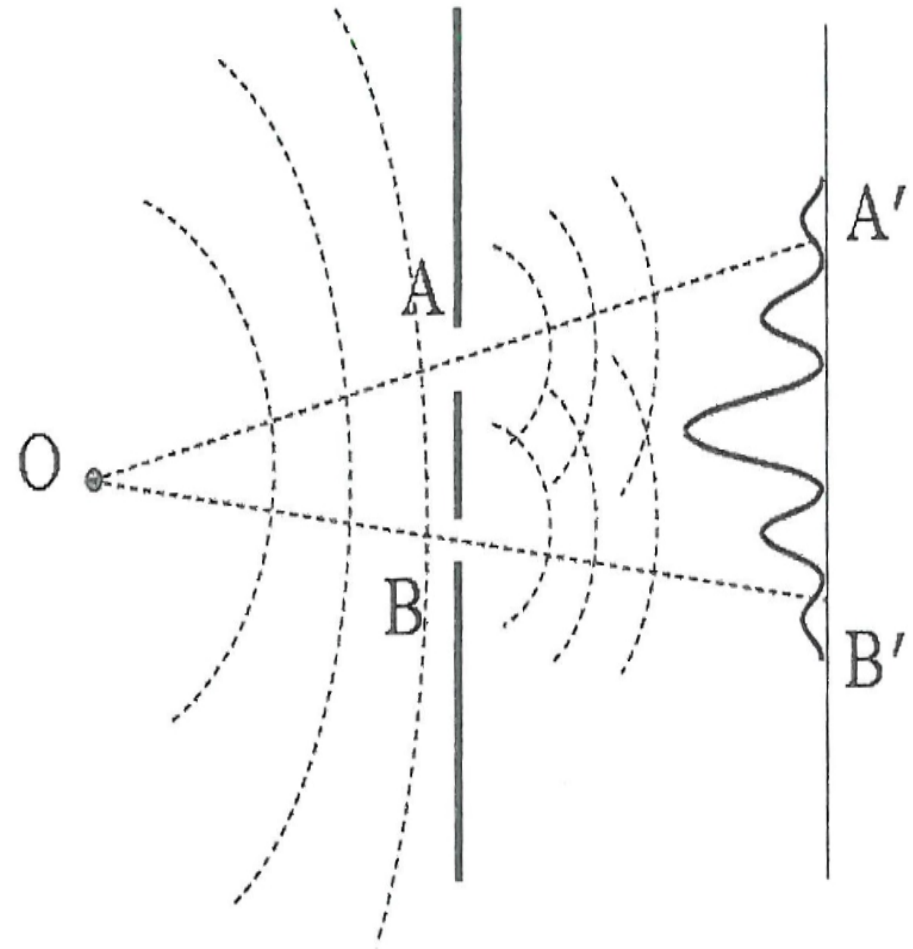
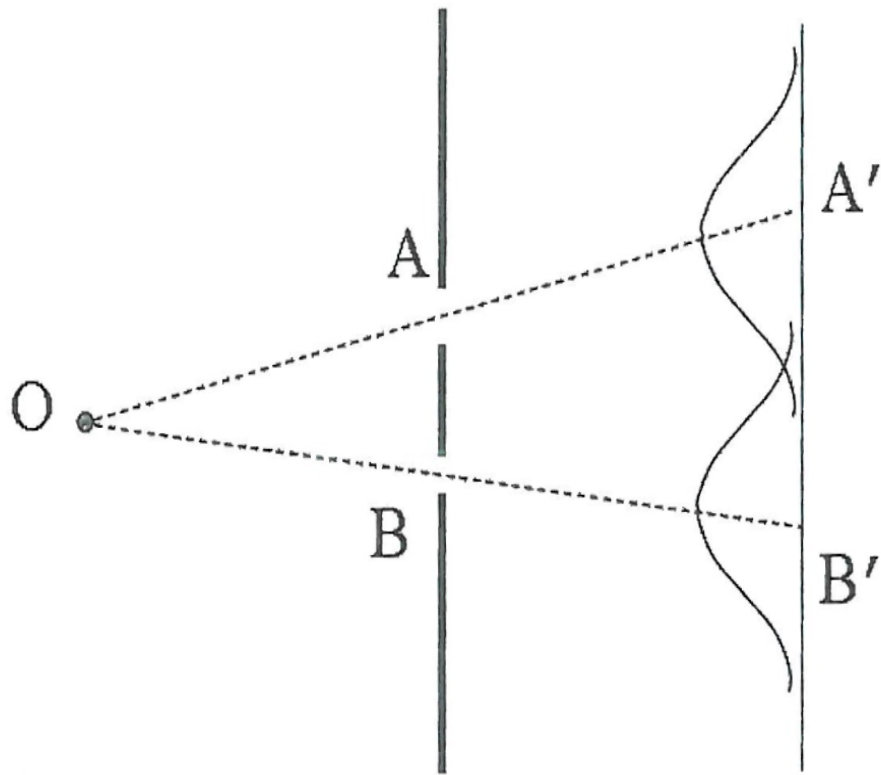


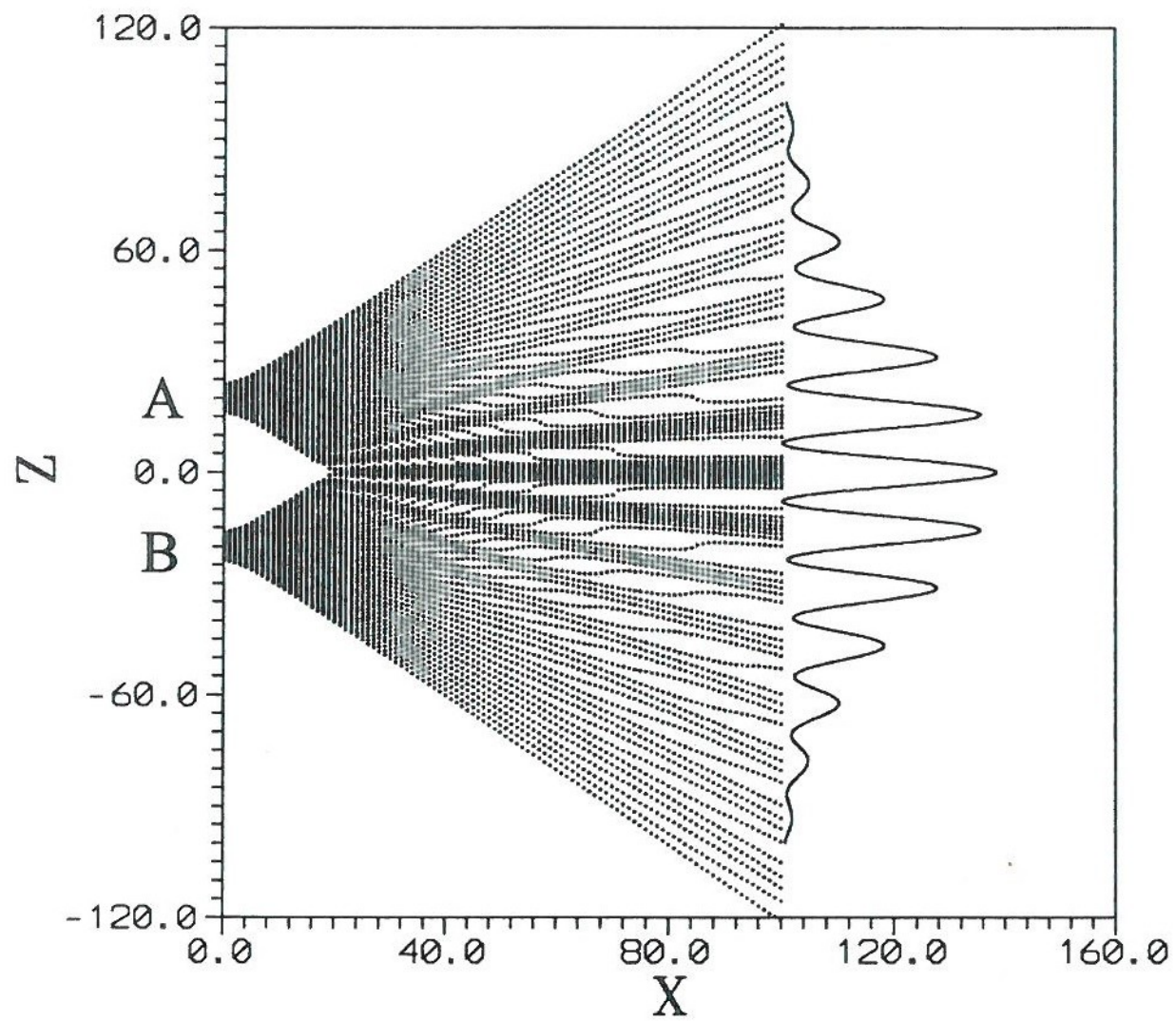
Κβαντικά Ολοκληρώσιμα

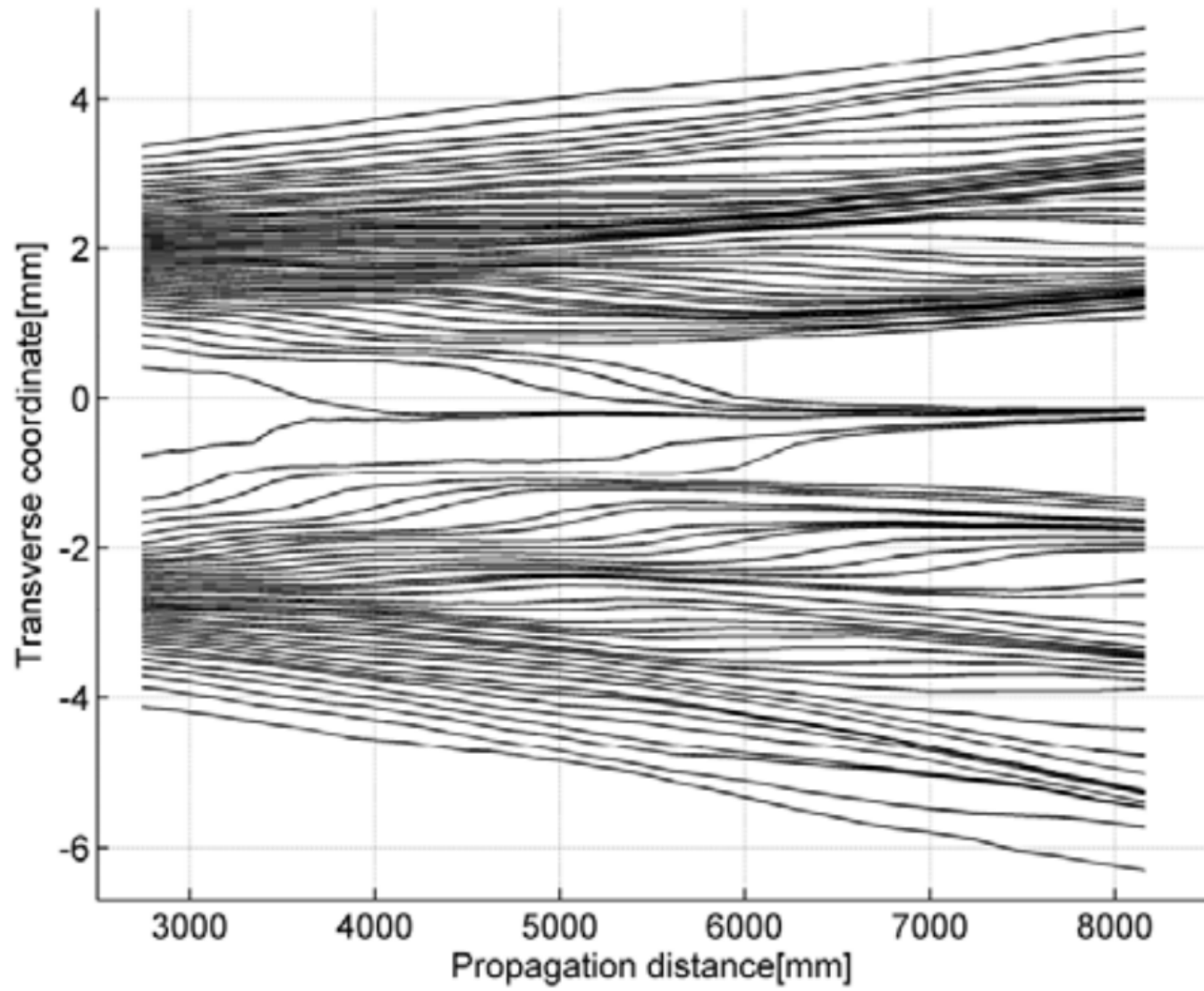
$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$



Πρόβλημα 2 οπών







Kocsis et al. (2011).

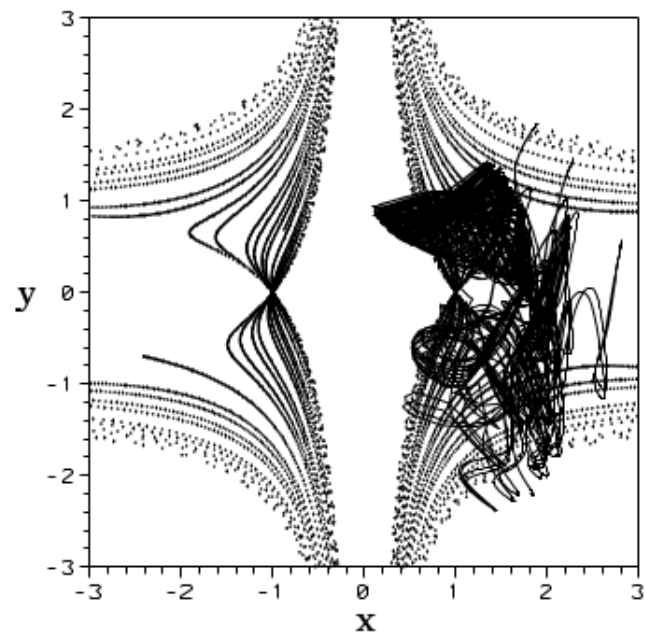
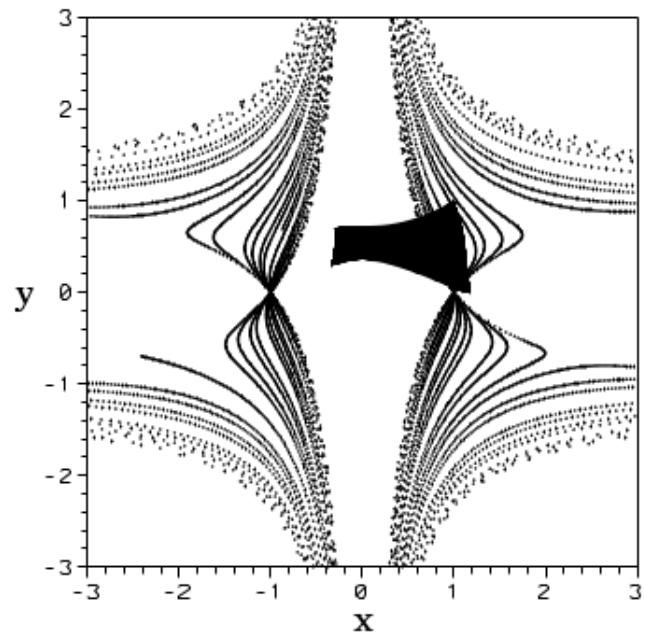
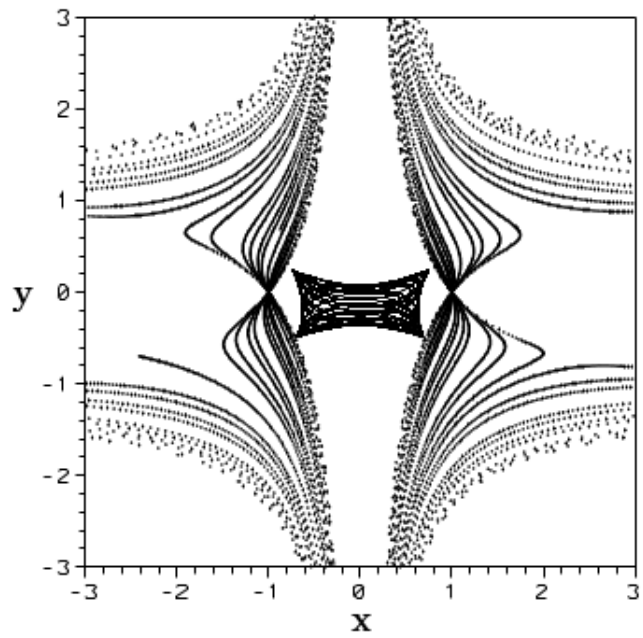
Εξισώσεις Κινήσεως

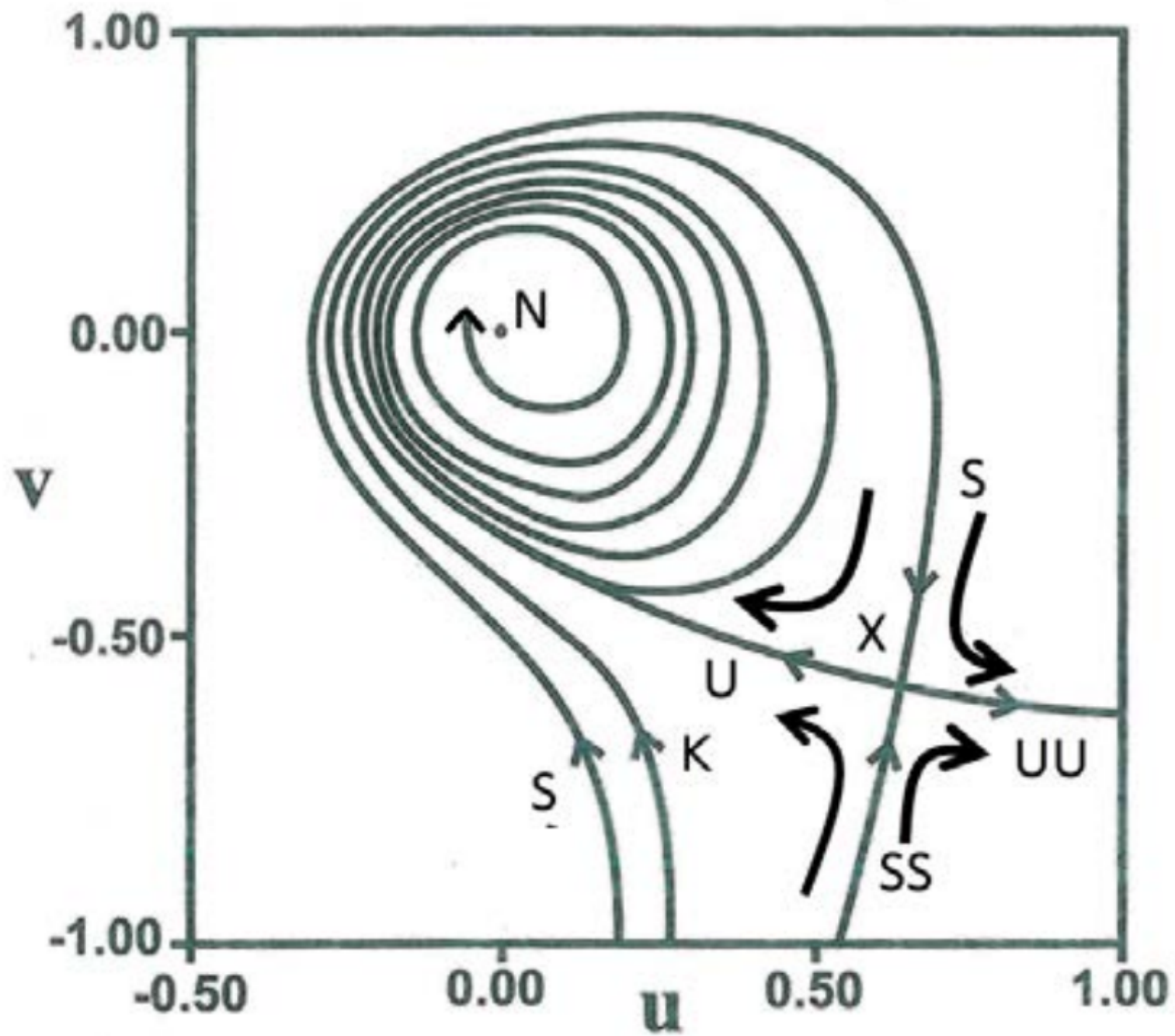
$$\frac{dr}{dt} = \text{Im} \left(\frac{\nabla \Psi}{\Psi} \right)$$

(de Broglie 1926, Bohm 1952)

Κομβικά Σημεία:

$$\Psi_R = \Psi_I = 0$$



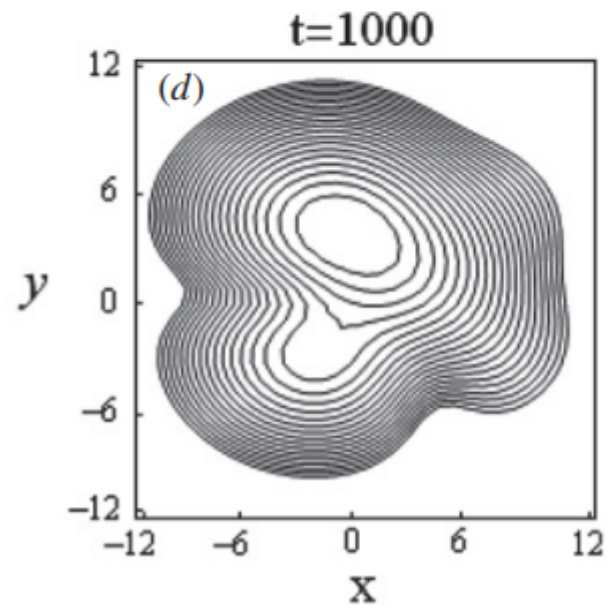
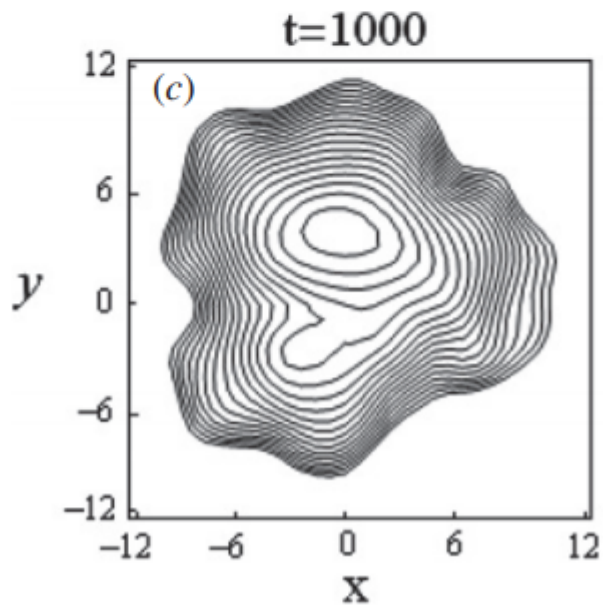
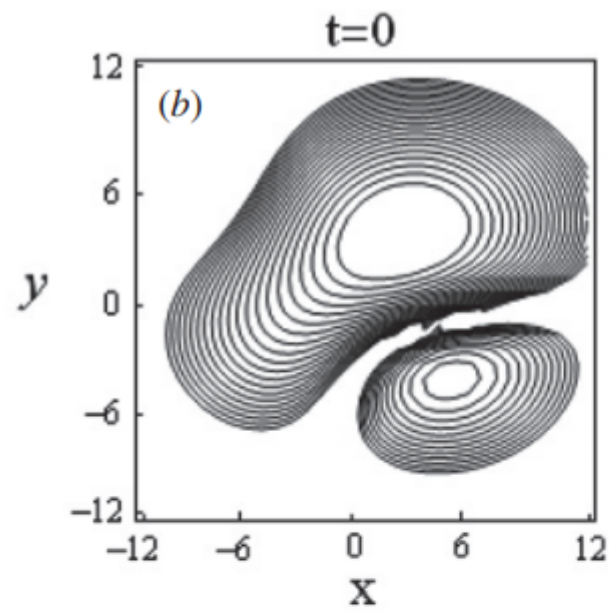
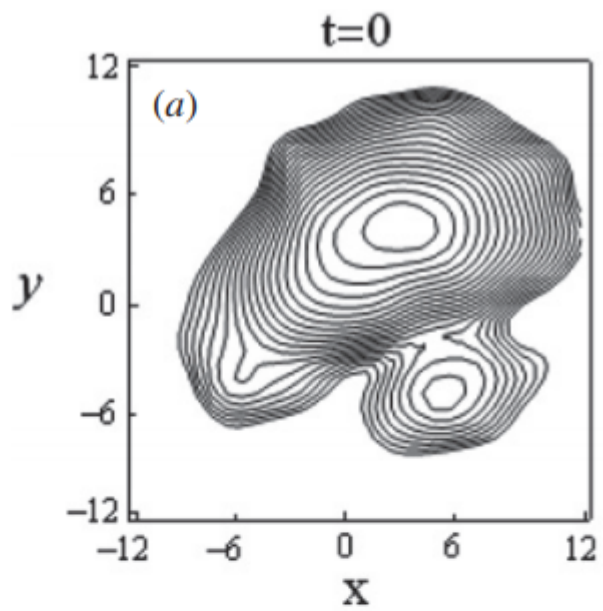


Κανόνας του Born

$$P = |\Psi|^2$$

Ισχύει πάντα αν

$$P_0 = |\Psi_0|^2$$



Εάν $P_0 \neq |\Psi_0|^2$

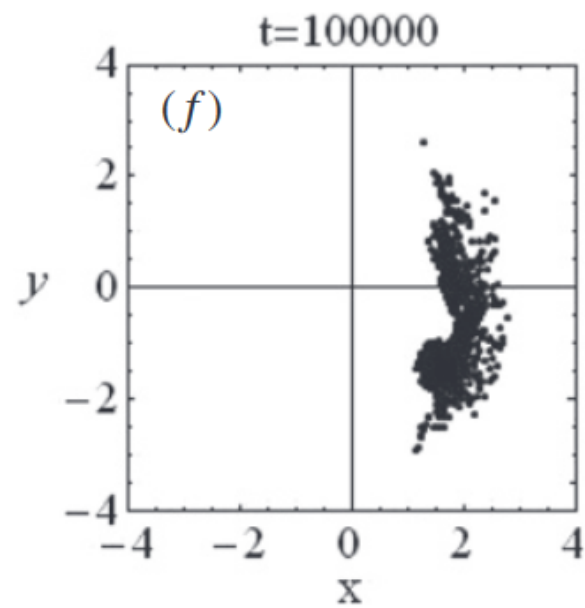
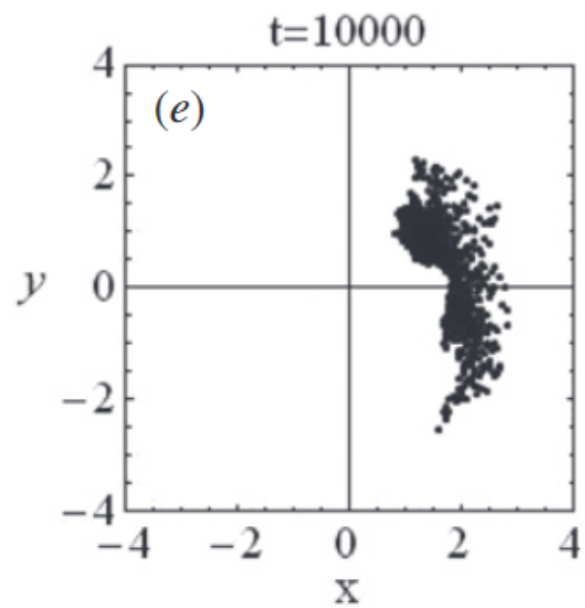
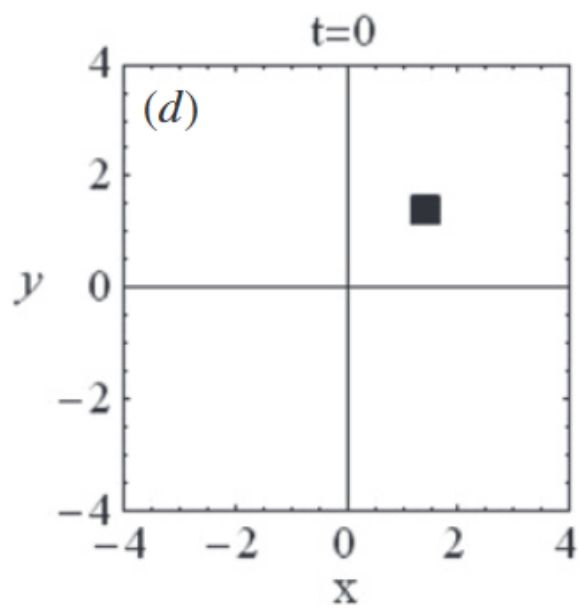
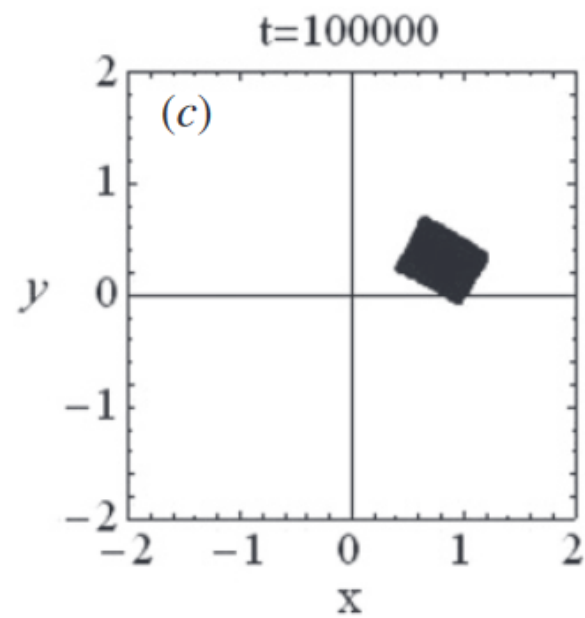
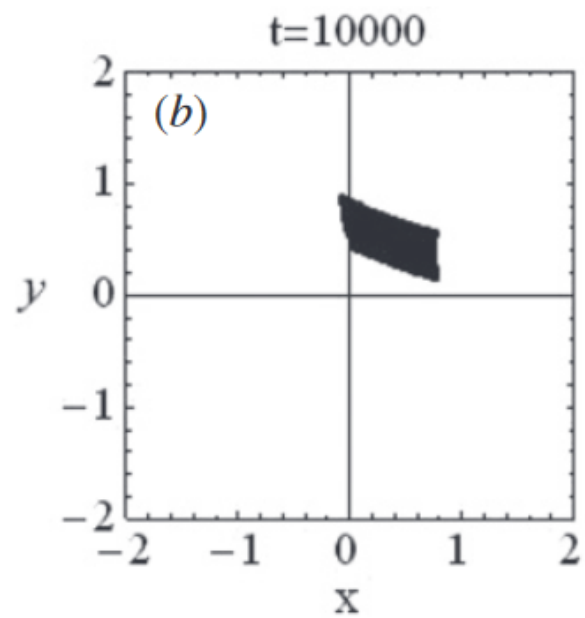
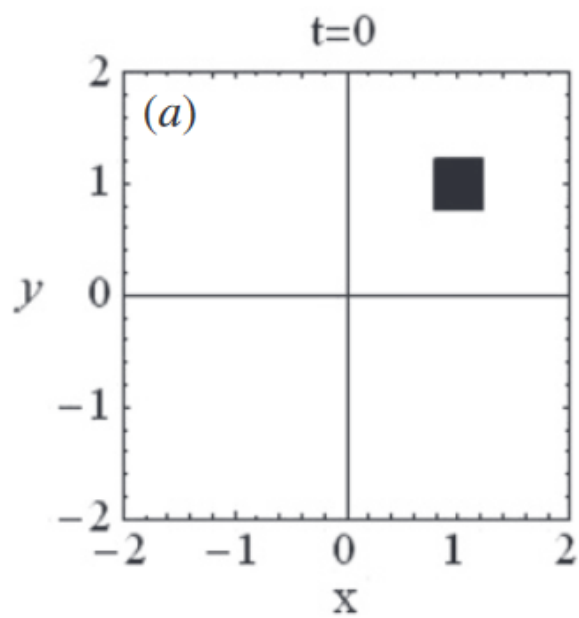
τότε υποτίθεται ότι $P \rightarrow |\Psi|^2$

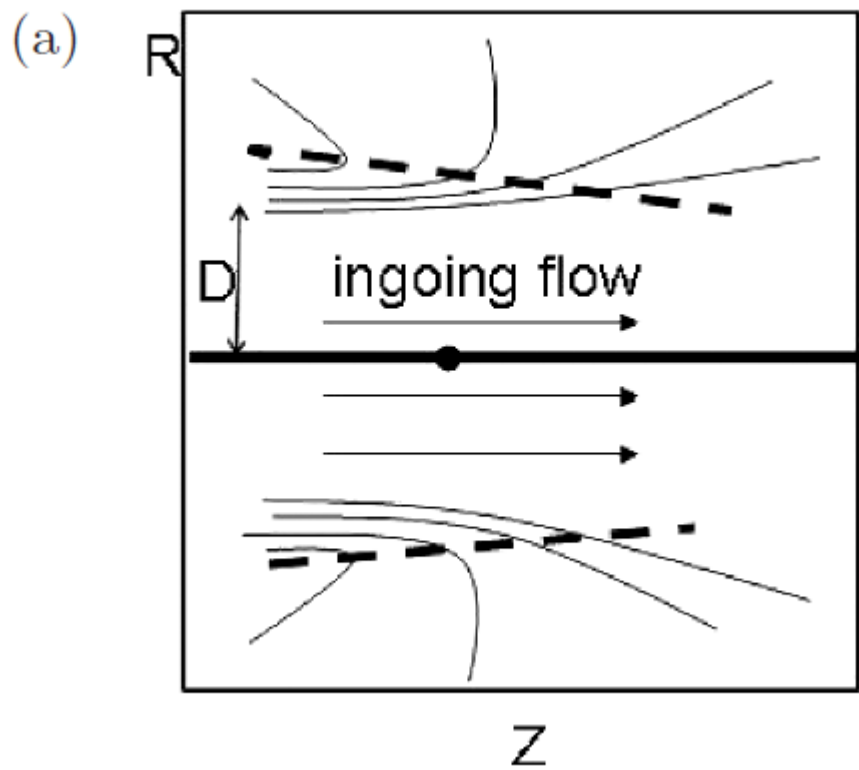
όταν $t \rightarrow \infty$

Αυτό ισχύει εν γένει για τις
χαοτικές τροχιές.

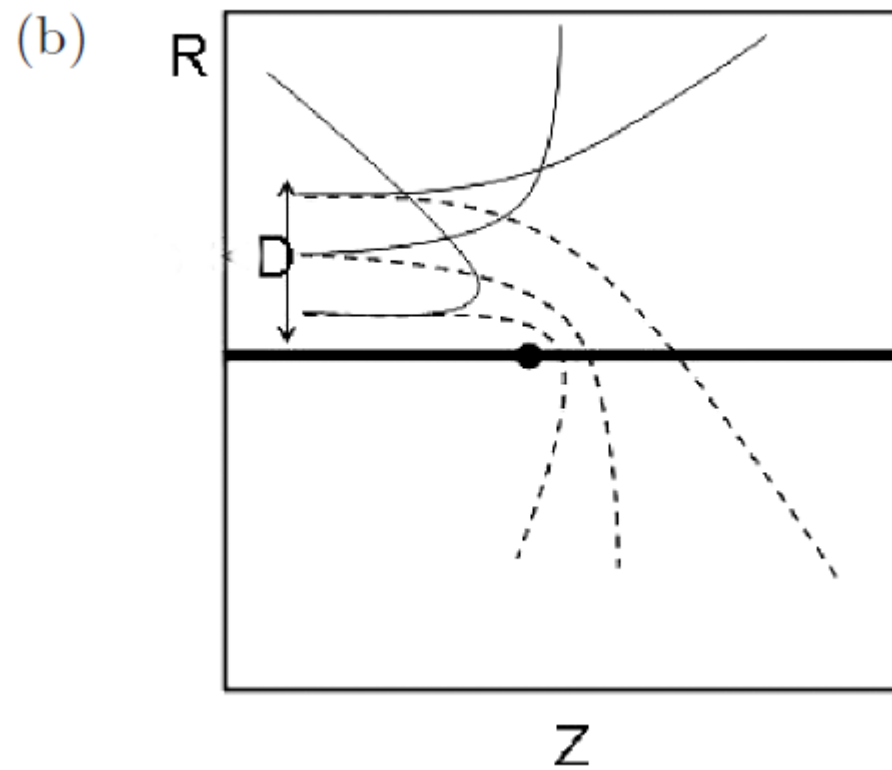
Όχι όμως για τις οργανωμένες
τροχιές.

Επίσης δεν ισχύει και σε
μερικές χαοτικές
περιπτώσεις.

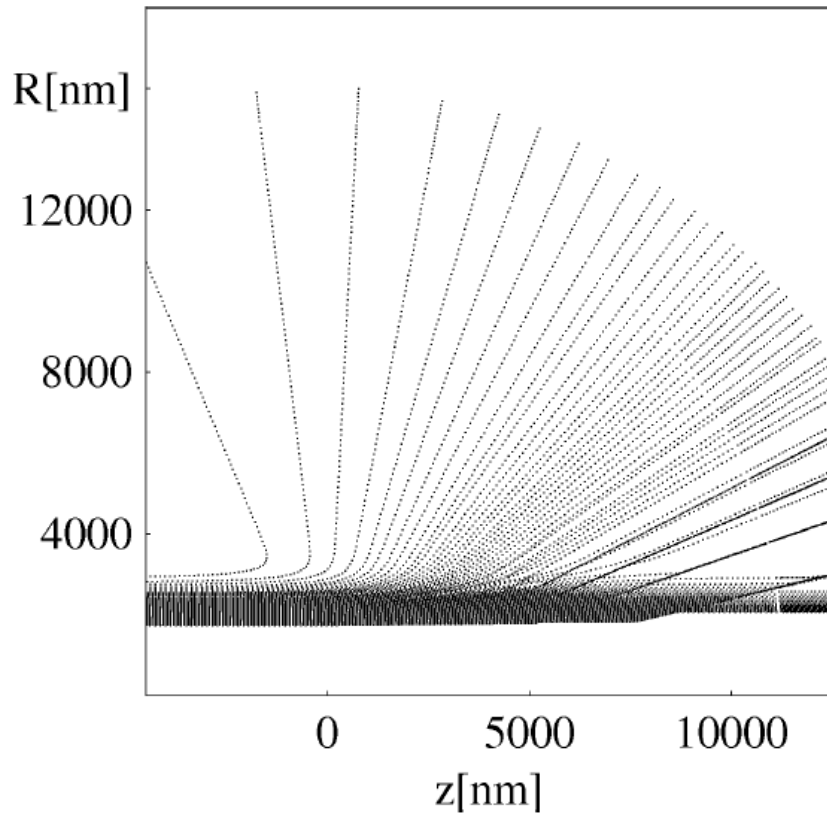




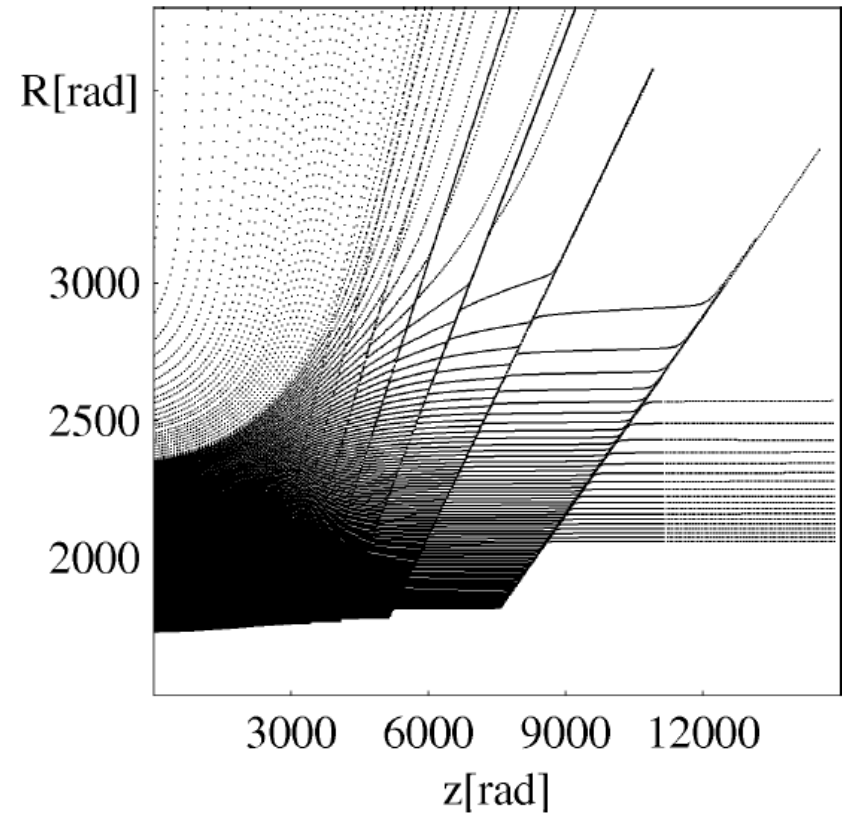
Κβαντική σκέδαση ηλεκτρονίων



Κλασική σκέδαση ηλεκτρονίων



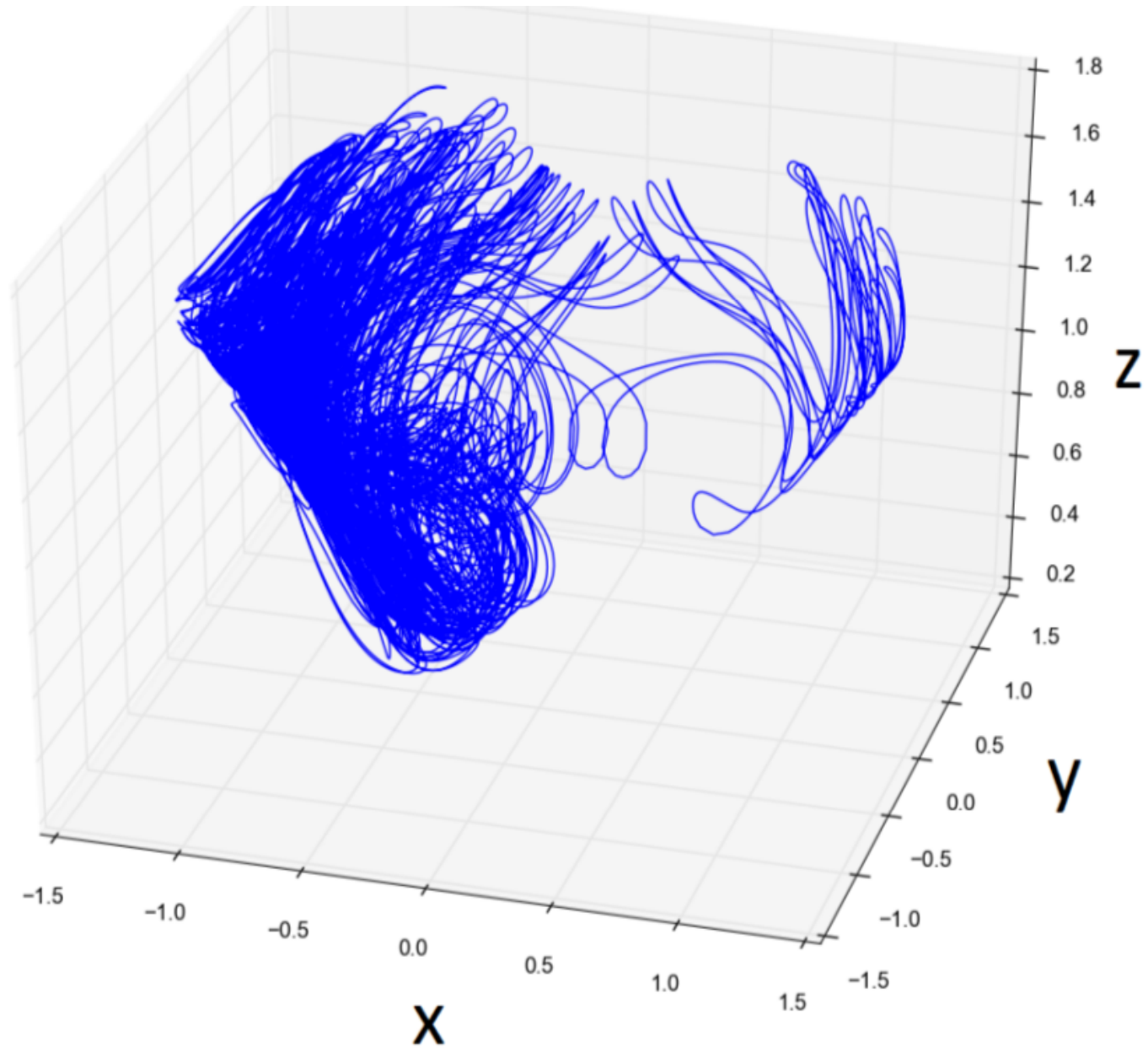
(a)



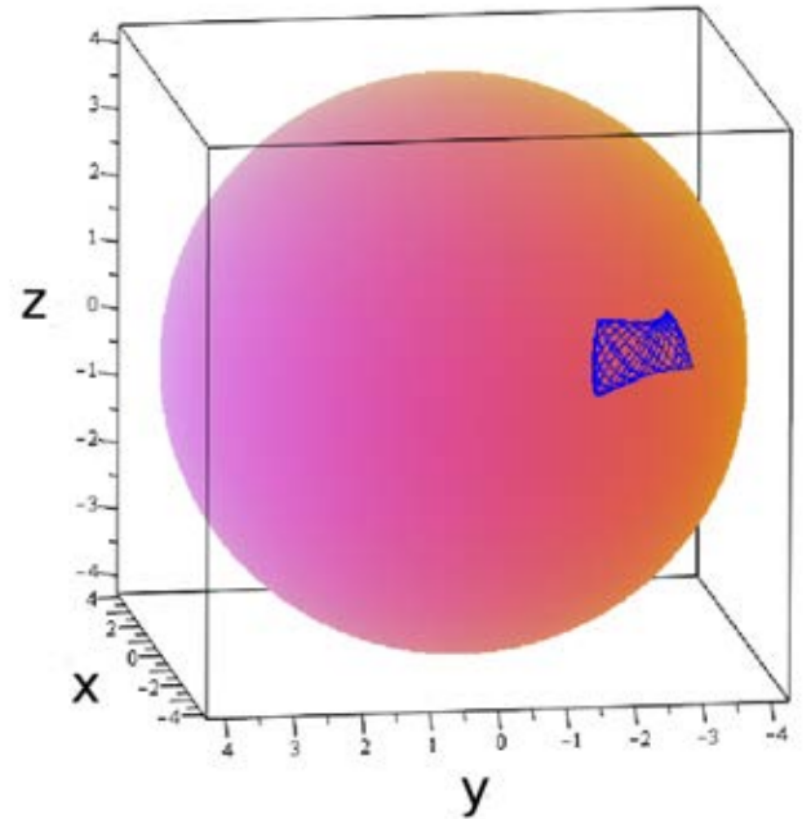
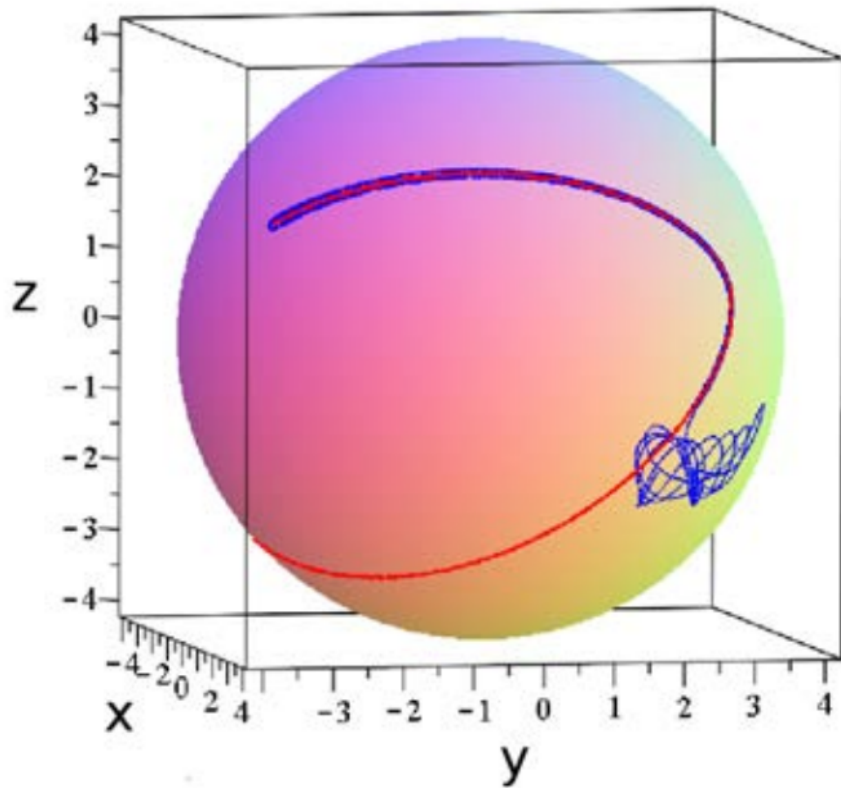
(b)

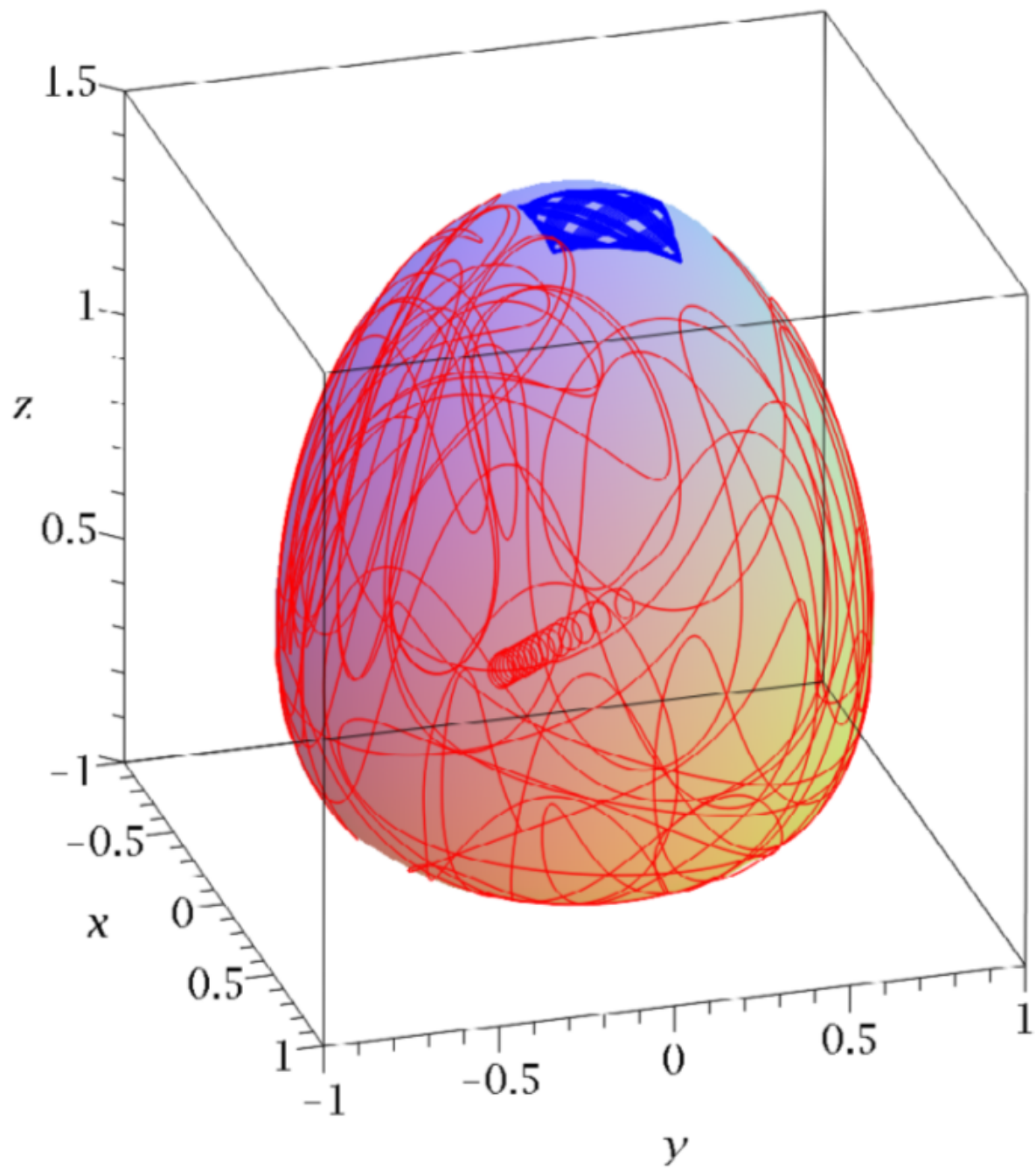
Γωνίες Bragg

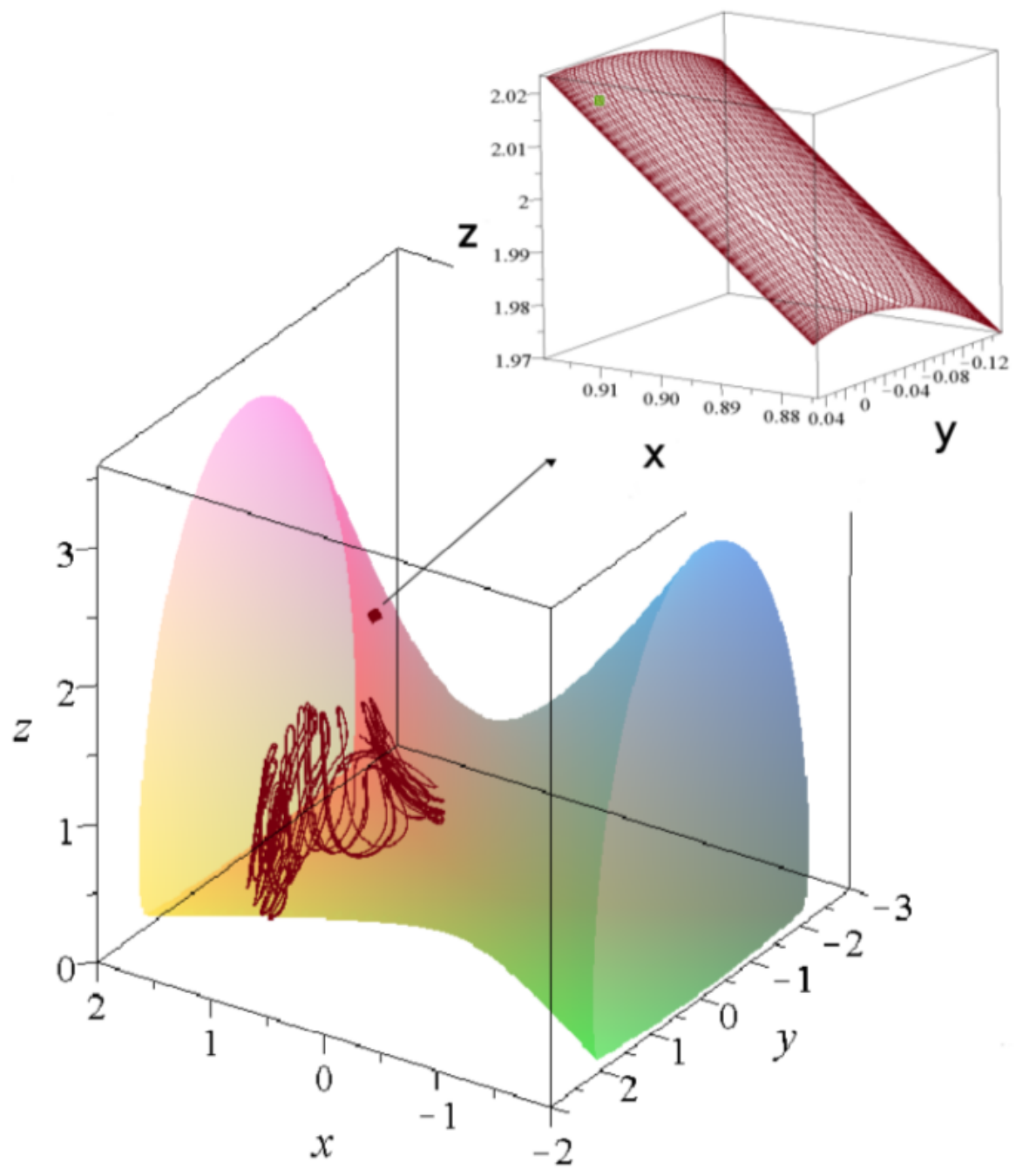
Χάος σε τρεις διαστάσεις

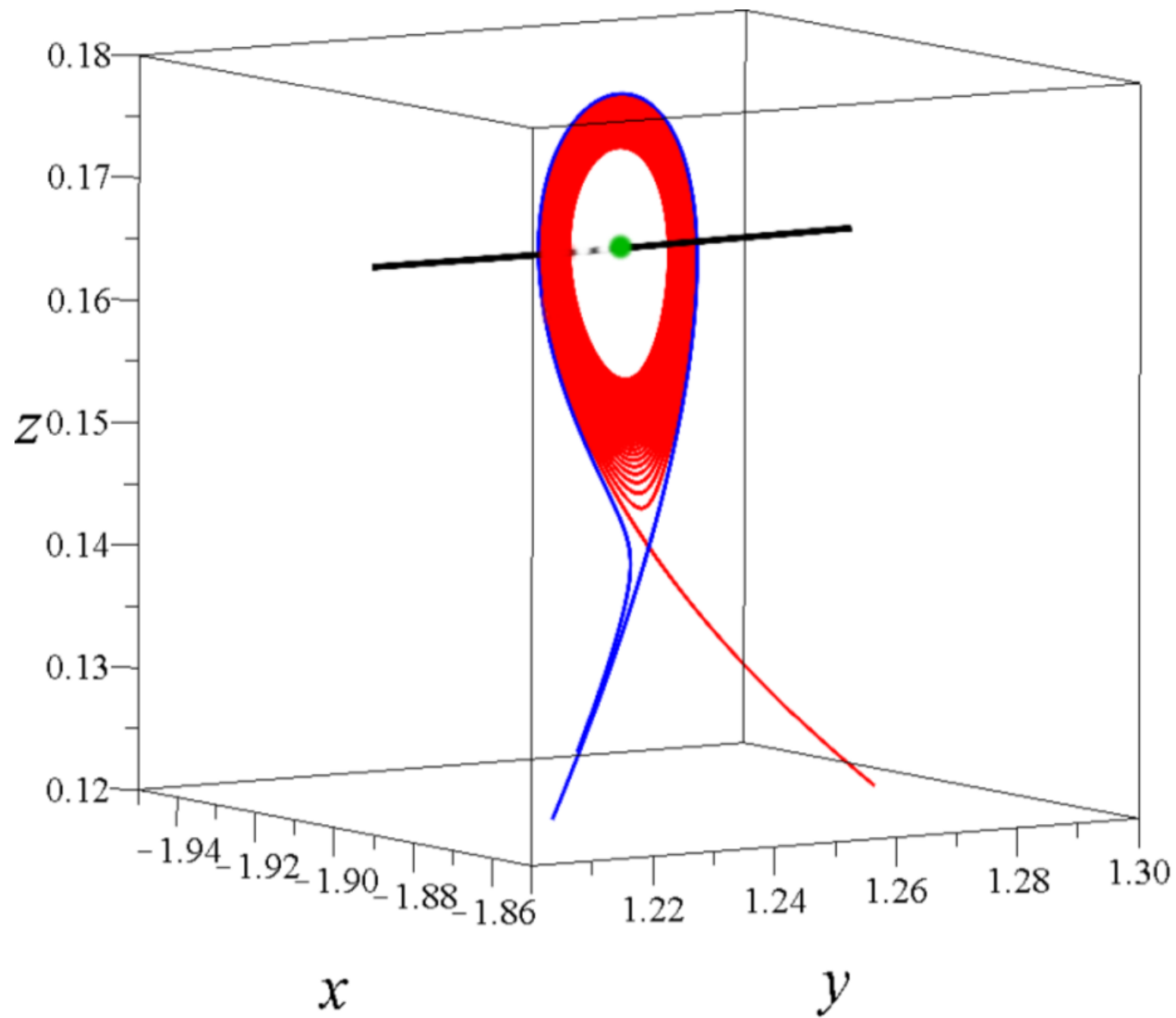


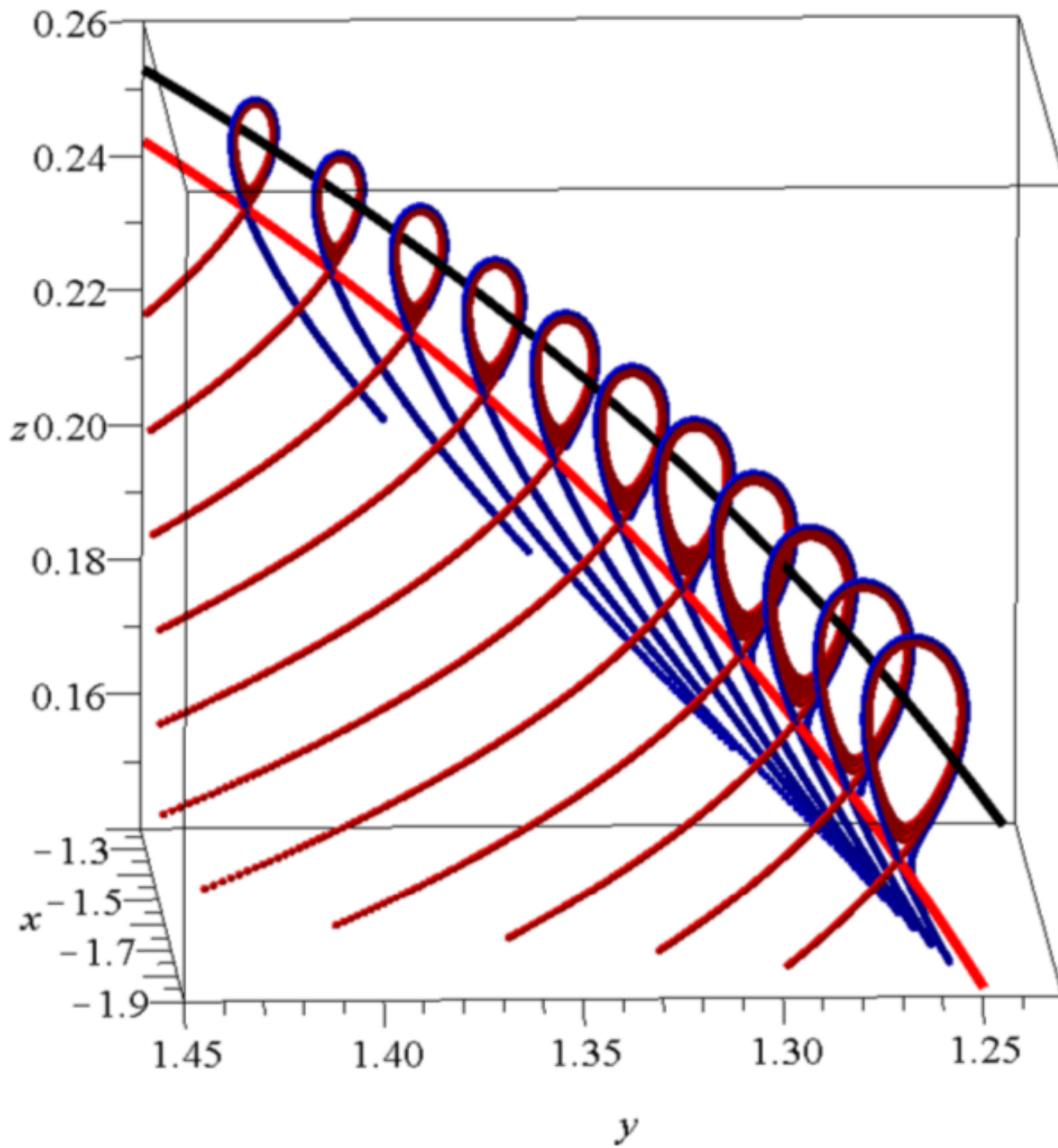
Μερική Ολοκληρωσιμότητα











Entanglement=Σύμπλεξη

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + \omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2)$$

$$\Upsilon = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4} \exp \left[-\frac{\omega}{2} \left(x - \sqrt{\frac{2}{\omega}} \alpha_0 \cos(\sigma - \omega t) \right)^2 + i \left(\sqrt{2\omega} \alpha_0 \sin(\sigma - \omega t) + \xi \right) \right]$$

$$\xi = \frac{1}{2} \{ \alpha_0^2 \sin [2(\omega t - \sigma)] - \omega t \}$$

$$Y_{Rx} = Y(x, t, \omega = \omega_x, \sigma = \sigma_x)$$

$$Y_{Ry} = Y(y, t, \omega = \omega_y, \sigma = \sigma_y)$$

$$Y_{Lx} = Y(x, t, \omega = \omega_x, \sigma = \sigma_x + \pi)$$

$$Y_{Ly} = Y(y, t, \omega = \omega_y, \sigma = \sigma_y + \pi)$$

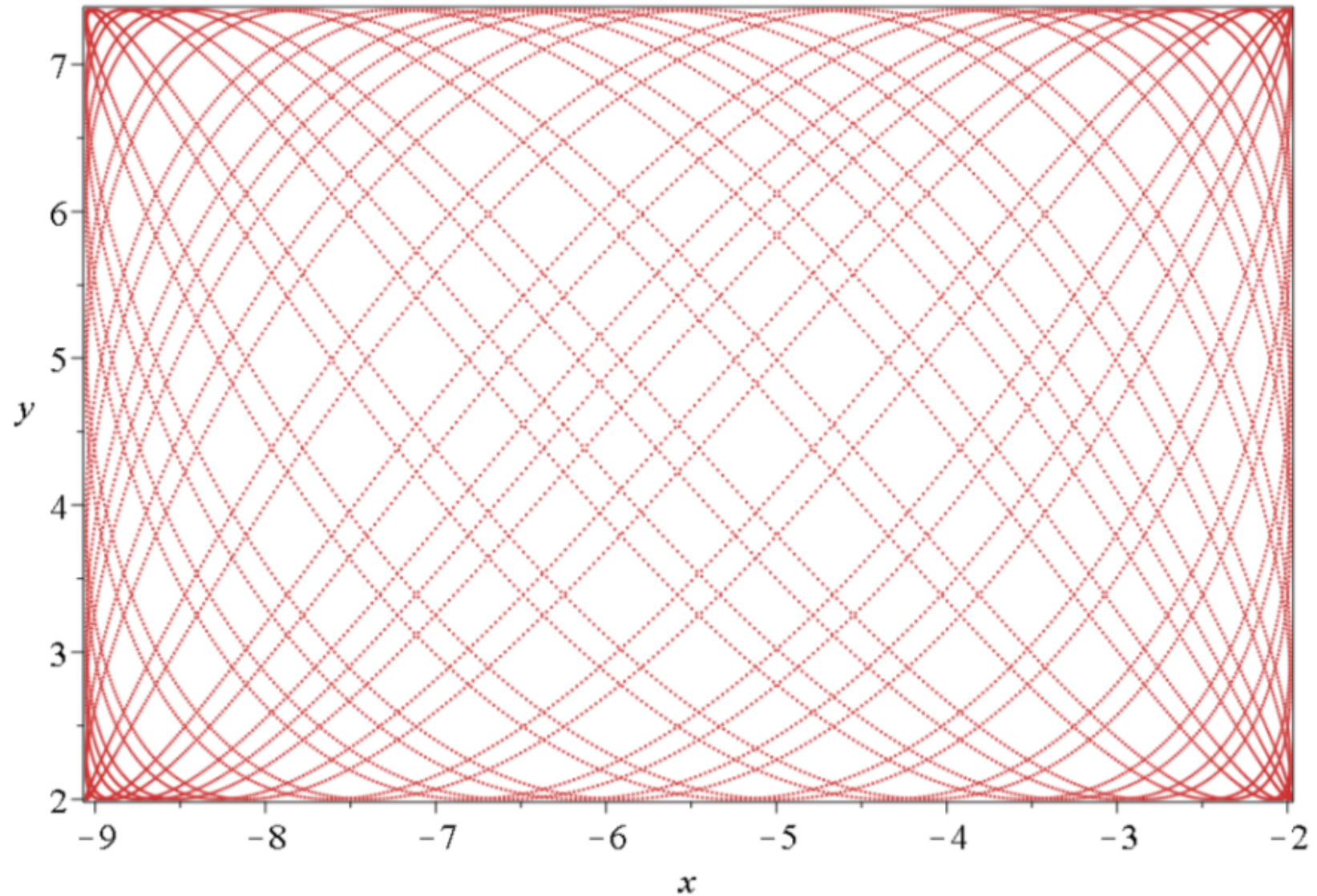
$$\Psi = c_1 \Psi_{Rx} \Psi_{Ly} + c_2 \Psi_{Lx} \Psi_{Ry}$$

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

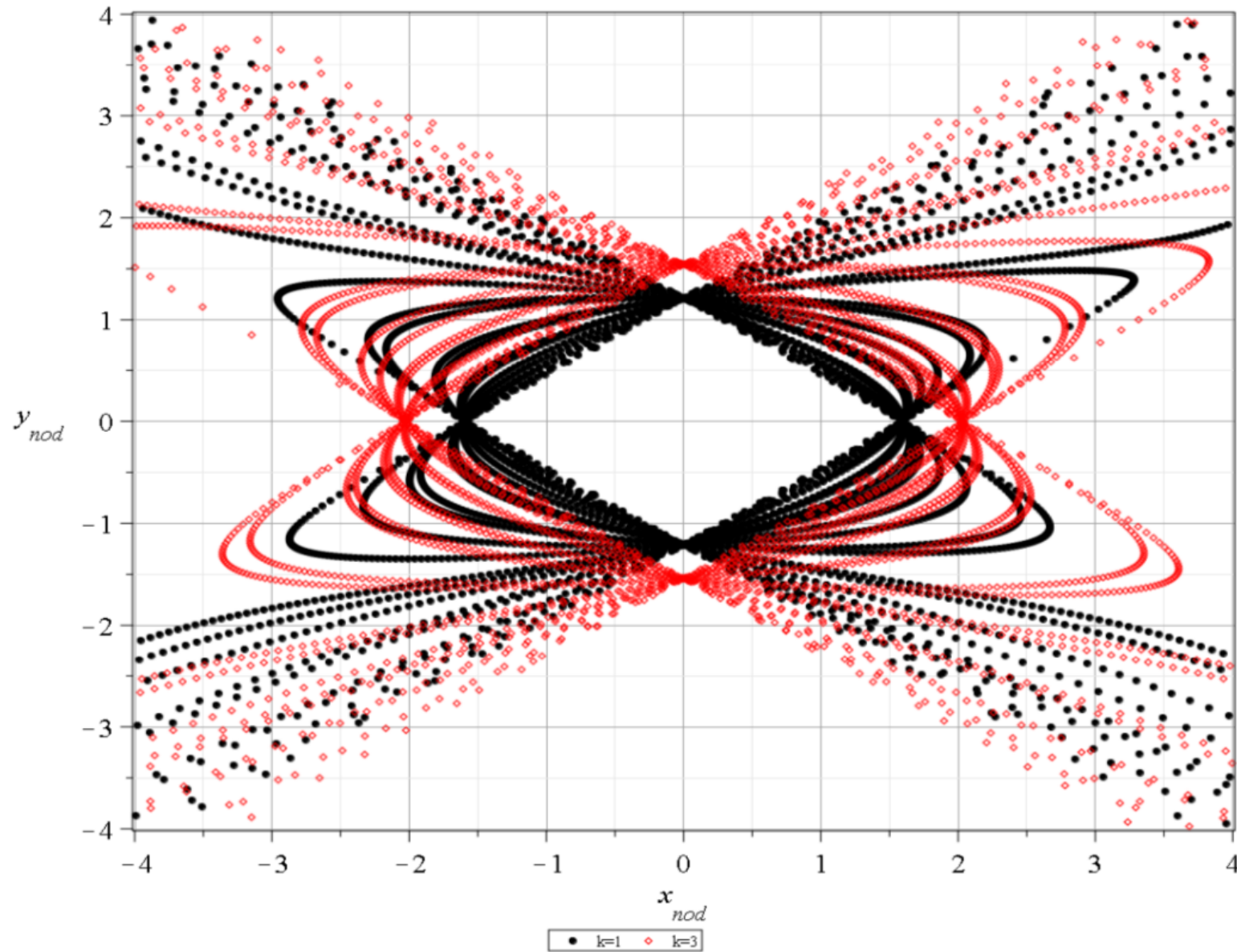
$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{2\omega_x}a_0 [A \cos(\omega_x t) + B \sin(\omega_x t)]}{G}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{2\omega_y}a_0 [A \cos(\omega_y t) + B \sin(\omega_y t)]}{G}$$

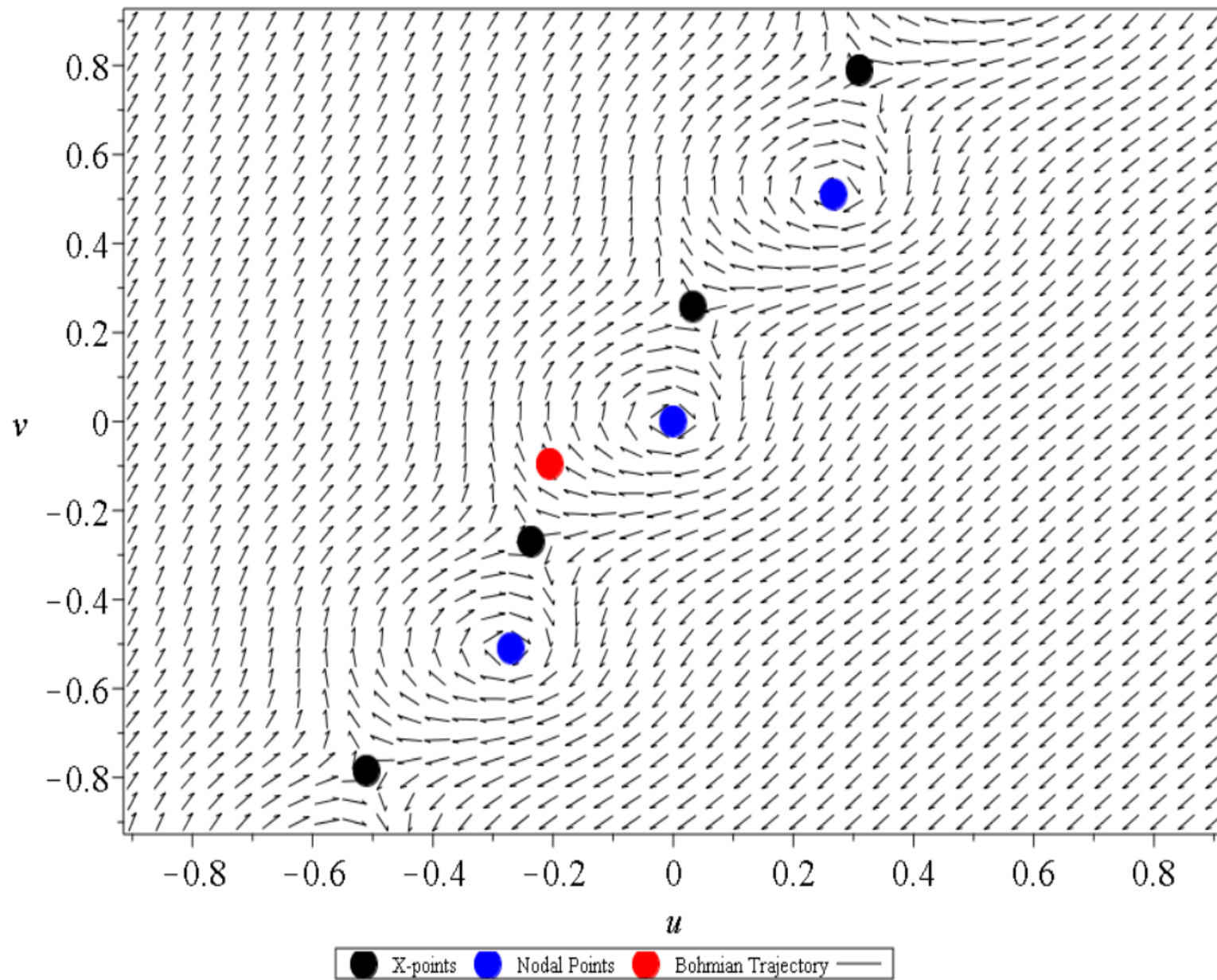
A, B, G πολύπλοκες
συναρτήσεις των x, y και t

Αν $c_2=0$ χωρίς σύμπλεξη

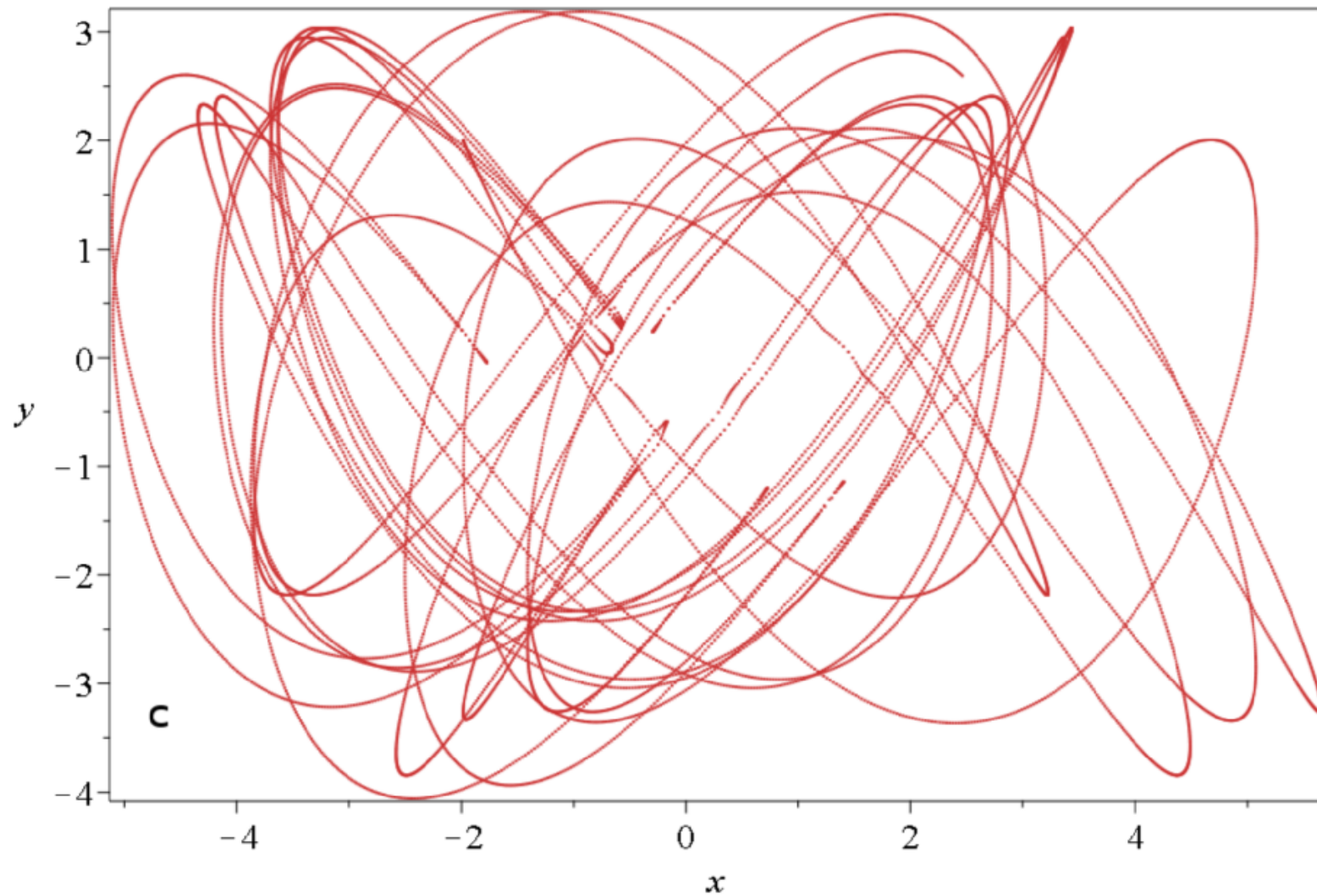


Τροχιές των κομβικών σημείων:

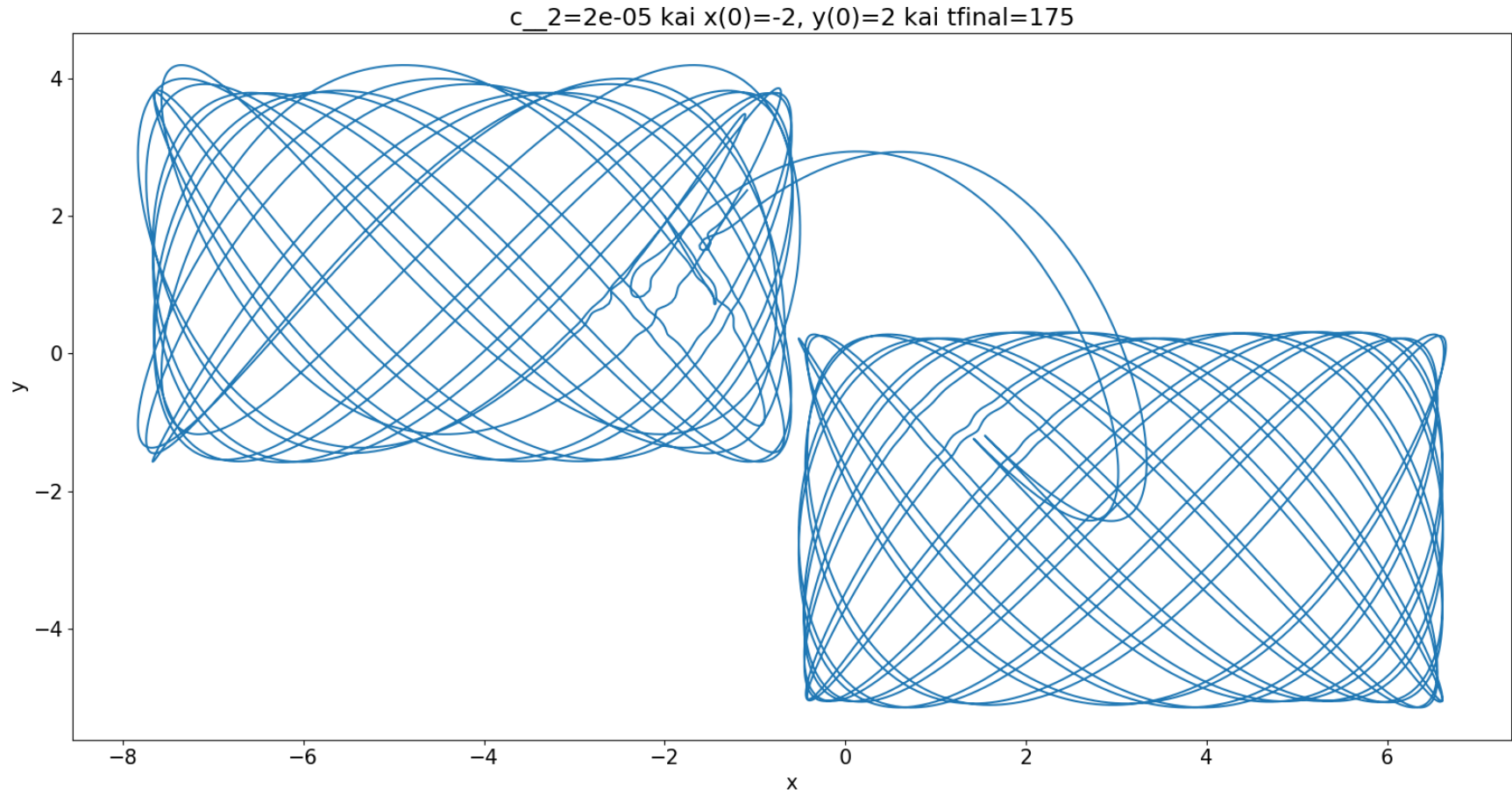




$$Av \quad c_2 = \sqrt{2}/2$$

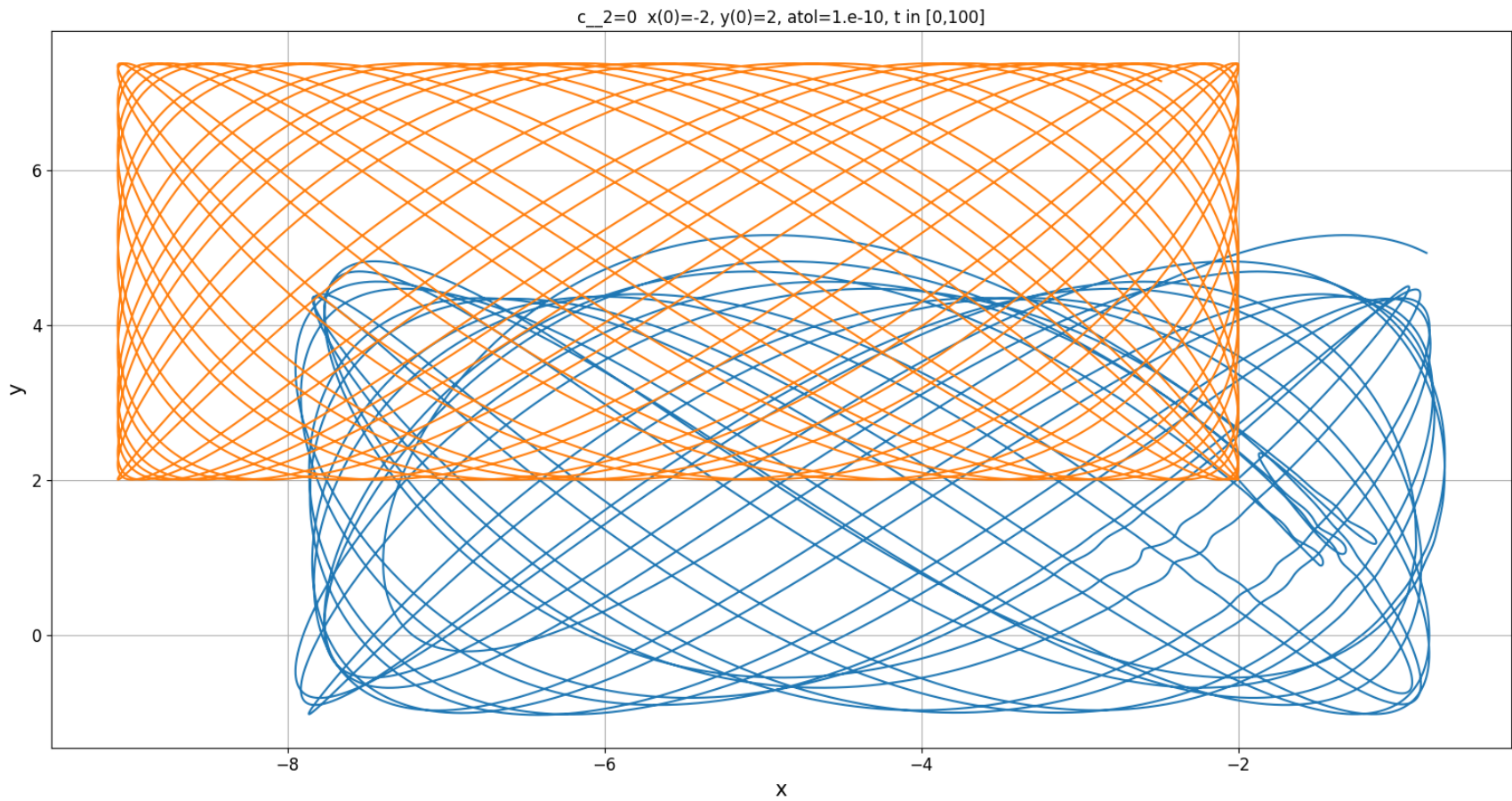


$$c_2 = 2 \times 10^{-5}$$



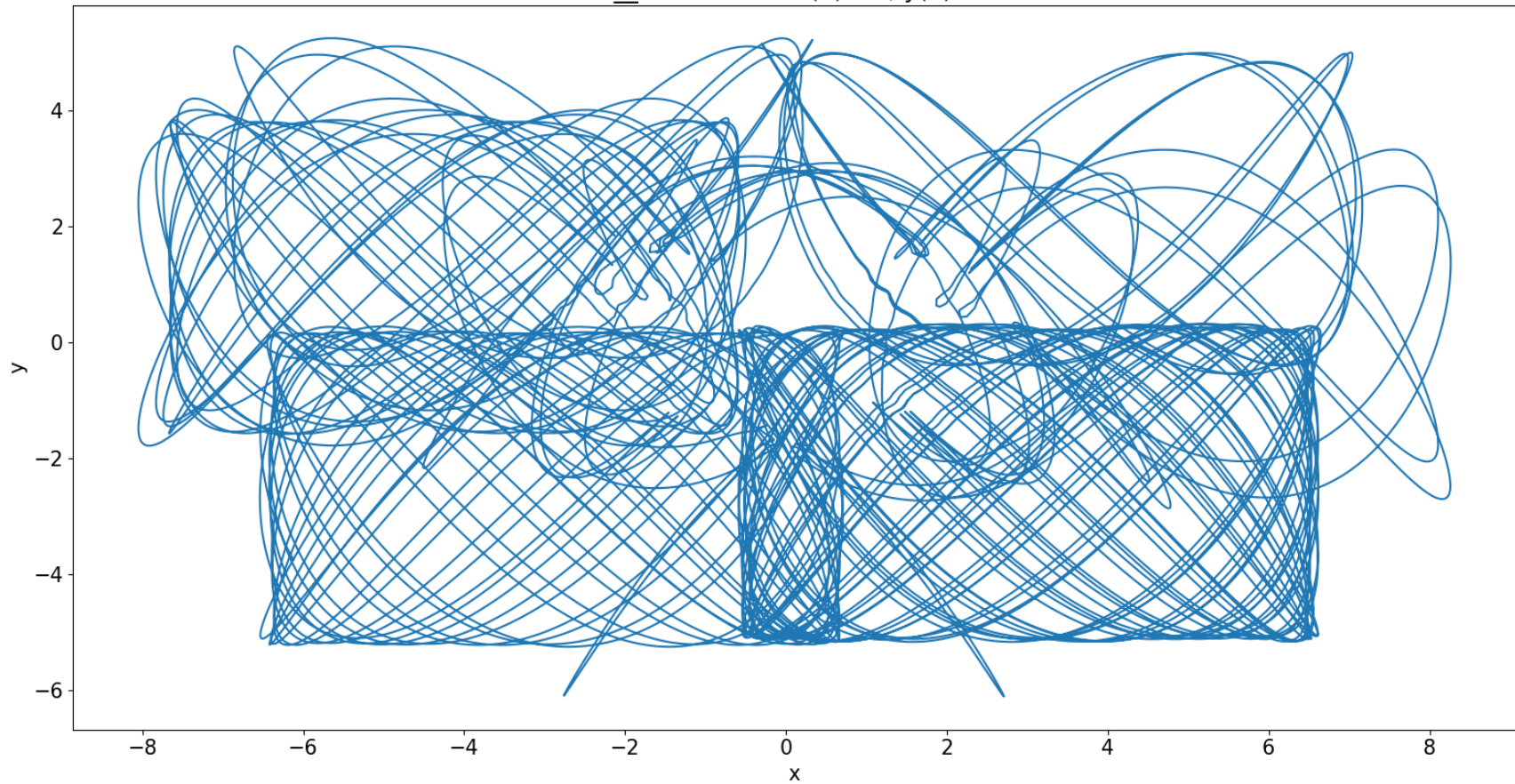
$$c_2 = 2 \times 10^{-6} \text{ (μπλε)}$$

$$c_2 = 0 \text{ (πορτοκαλί)}$$

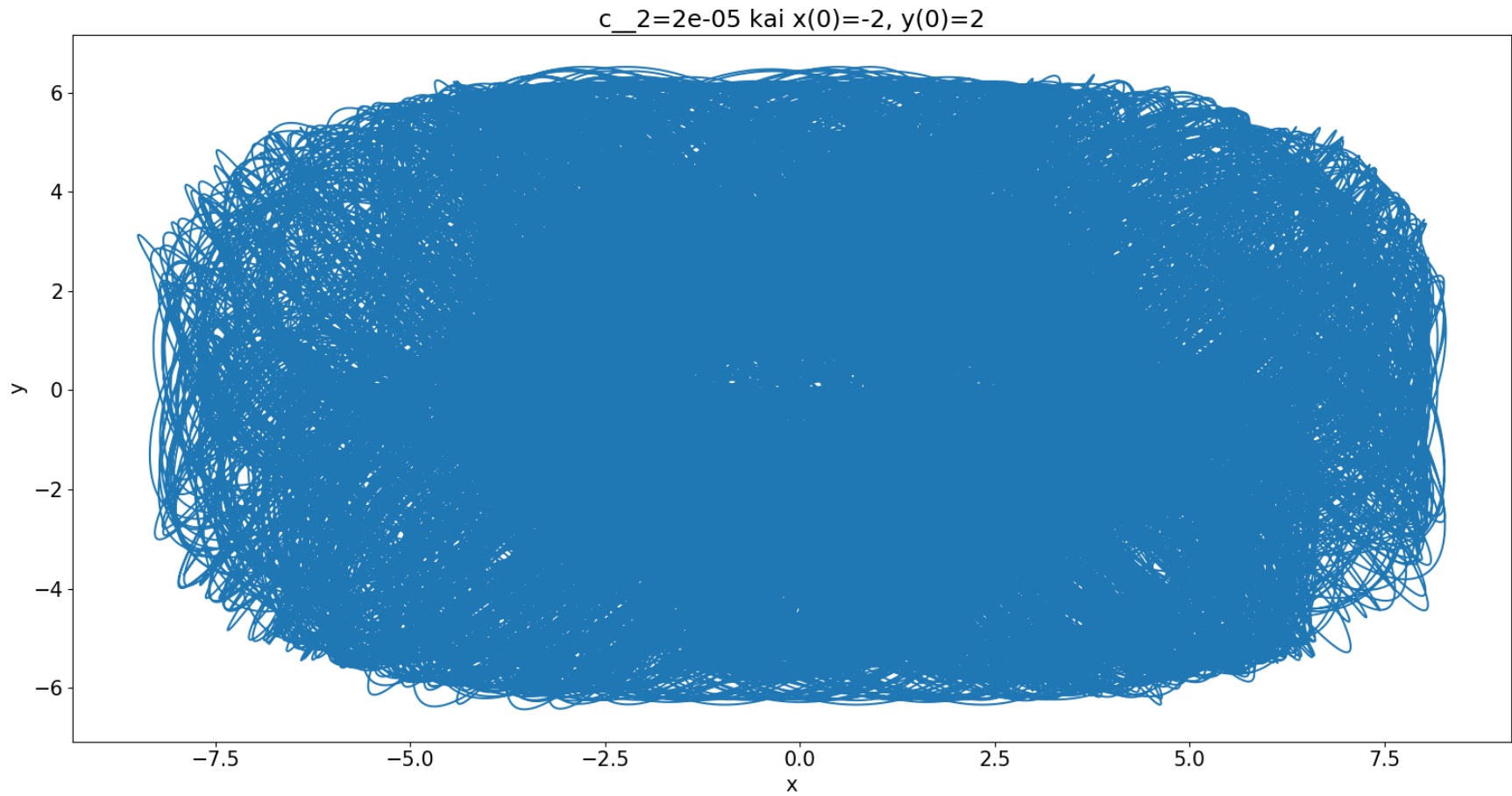


t=0-500

c_2=2e-05 kai x(0)=-2, y(0)=2



$t=0-10^4$



Συμπεράσματα

- Οι τροχιές Bohm δίνουν σημαντικές πληροφορίες για το χάος στην Κβαντομηχανική. Οι τροχιές αυτές διαφέρουν σημαντικά από τις κλασικές τροχιές.
- Ένα κλασικά οργανωμένο (ολοκληρώσιμο) σύστημα μπορεί να είναι κβαντικά χαοτικό. Εξ' άλλου ένα κλασικά χαοτικό σύστημα μπορεί να είναι κβαντικά οργανωμένο.

Συμπεράσματα

- Ο υπολογισμός των τροχιών Bohm στο πρόβλημα των δύο οπών εξηγεί την δημιουργία κροσσών συμβολής. Οι τροχιές αυτές έχουν επαληθευθεί πρόσφατα με πειράματα.
- Το χάος στην Κβαντομηχανική οφείλεται κυρίως στην προσέγγιση των τροχιών σε κομβικά σημεία όπου $\Psi_R = \Psi_I = 0$

Συμπεράσματα

- Ο κανόνας του Born ότι η πιθανότητα ισούται με το τετράγωνο του μέτρου της κυματοσυνάρτησης $P=|\Psi|^2$ επαληθεύεται πάντα αν αρχικά $P_0 = |\Psi_0|^2$. Αν όμως $P_0 \neq |\Psi_0|^2$ ο κανόνας αυτός δεν ισχύει για οργανωμένες τροχιές. Ισχύει εν γένει για χαοτικές τροχιές, υπάρχουν όμως και εξαιρέσεις.
- Η σκέδαση ενός ρεύματος αρχικά παραλλήλων τροχιών από έναν μικρό στόχο είναι πολύ διαφορετική από την κλασική σκέδαση Rutherford.

Συμπεράσματα

- Μελετήσαμε το χάος σε 3 διαστάσεις. Σε ορισμένες περιπτώσεις (μερικώς ολοκληρώσιμες περιπτώσεις) οι τροχιές ευρίσκονται πάνω σε επιφάνειες.
- Τέλος μελετήσαμε την κβαντική σύμπλεξη (entanglement) τροχιών σε 2 βαθμούς ελευθερίας καθώς η σύμπλεξη αυξάνει από το 0 προς τη μέγιστη τιμή της.